TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÄGMAN

J. S. HEDSTRÖM G. STARCK A. WAHLGREN

TJUGONDE ÅRGÅNGEN

1937

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

Holmqvist, A. Undersökningar av antimons och vismuts elektromotoriska förhållanden i vattenlösning (ref. av gradualavh.) 207
Hultén, Elsie. Anm. av T. Odhe, Skogen blir kläder och A. Zischka, Kampen om bomullen — en världsfaktor 119
Ingelstam, E. Die K-Spektren der schweren Elemente (ref. av gradualavh.) 130
Levin, C. A. En faktorupplösning av binomet x^{p-1} (mod. p) .. 81
Lindholm, S. En enkel televisionssändare och mottagare 104
Lundquist, O. Objektiv demonstration av radioaktivt sönderfall med Geigers spetskammare 113
Lunell, E. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel 41
Lönnqvist, C. Anm. av Lychnos, årg. 1936 54
Nordefeldt, E. Anm. av H. Lund og H. Rasmussen, Kemi for Gymnasiet 201
Nordhult, A. De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna II 23
Olson, Hj. Konstr. av längden på en hyperbels konjugataxel 103
— — Några reflexioner kring vårens studentuppgifter i matematik 182
Petersson, H. Anm. av J. K. Eriksen og P. Pedersen, Astronomi for Gymnasiet 201
— — Anm. av Beckman-Jenvall, Astronomi 276
Petterson, E. L. Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome (ref. av gradualavh.) 65
Rendahl, C. Kundts rör 191
Sedström, E. Anm. av H. Wallengren, Världen och människan, Del I 58
Simmons, T. Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel 40
Sjöstedt, C. E. Anm. av G. Oxenstierna, Sannolikhetens filosofi 199
— — De matematiska studentuppgifterna 273
Sjöström, M. Anm. av Kosmos, Bd 14 55
— — Vätskors och gasers strömning 153
Starck, G. I vad mån fyller läroverkens kemikurs de krav, som andra skolämnen, vetenskap och teknik kunna ställa på den? 46
— — och Ekman, W. Framställning av ammoniaksoda 109
— — Klorvätets volymsammansättning 111
— — Anm. av P. B. Freuchen, Kemisk Potential og andre fysisk-kemiske Emner och av T. Knöös, Elementär lärobok i kemi 120
— — Laborationsförsök med klor i realskolan 272
Stenvinkel, G. Das Bandenspektrum des Zinkhydrides. Störungen in den Bandenspektren zweiatomiger Moleküle (ref. av gradualavh.) 63
Stolt, H. Anm. av C. Bergholm, Värmelära 60
Sundberg, N. Anm. av Zero, 60 st. trigonometriska ekvationer.. 203

SUNDQVIST, M. Teorien för de i handeln f. n. tillgängliga glasögonen 225
SVENSSON, B. Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Styrelseberättelse för 1936 50
— — Vårsammanträde med Föreningen i Lund för matem.-naturv. underv. 133
TANDBERG, J. Anm. av Emerson Andrews, New Numbers.... 52
— — Anm. av Sv. Dagbladets enquête: Olösta gåtor och aktuella problem 196
— — Anm. av H. Kallmann, Einführung in die Kernphysik .. 277
— — The Absorption of hard γ-rays as studied by Means of nuclear Reactions and artificial Radioactivity (ref. av gradualavh.) 280
TÖRNQVIST, L. Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen, arithmetische Ketten und diophantische Approximationen (ref. av gradualavh.) 67
WAHLGREN, A. Heltalsmånghörningar 1
— — Faktorerna i Herons formel 270
WALLENQUIST, Å. Problemet att bestämma stjärnornas fördelning i rymden 255
WIGERT, S. Ett problem rörande den lineära homogena diff.-ekv. av 2:a ordningen 12
— — Om ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ 15
WODE, G. Några etylenoxiders hydrolyshastighet (ref. av gradualavh.) 124
UHLER, A. Anm. av E. Hubendick, Differential- och integralräkning 116
— — Anm. av W. Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz och Von der Pythagoreischen Gleichung zum Fermatschen Problem; Lietzmann-Trier, Wo steckt der Fehler?; M. Zacharias, Das Parallellenproblem und seine Lösung 278
ÅSTRAND, S. Föreningen för matem.-naturv. underv. Årsmöte i jan. 1937. Styrelseberättelse för 1936 42

Pristävlan utlyst av Fornanderska fonden 135
Tidskriften som premium till elever vid skolor i Sverige och grannländerna 212, 223
Föredrag under hösten 1936 och våren 1937 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 69, 136
Föreläsningar för lärarkand. vid provårsläroverken 1936—37 211
Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser 1936—37 211
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1937: jan. (77), april (143), aug. (218), nov. (288).
Provräkning i realexamen v. t. och h. t. 1937 ..... 149, 294

Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v. t. och h. t. 1937 ..... 150, 295
» » : Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v. t. 1937 151
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 73, 138, 213, 284
Gradualavhandlingar (autoreferat): Anna Beckman (210), E. Brunius (205), A. af Ekenstam (127), G. Funke (282), T. Heimer (208), A. Holmqvist (207), E. Ingelstam (130), E. Petterson (65), G. Stenvinkel (63), J. Tandberg (280), L. Törnqvist (67), G. Wode (124).
Tidskrifter, innehållsöversikt 71, 137, 152
Bokanmälningar: Andrews, New Numbers; Karlson, Från atom till universum; Lychnos, Lärdomshistoriska samfundets årsbok 1936; Kosmos, Bd 14; Wallengren, Världen och människan; Bergholm, Värmelära; Meddelande om ny materiell från P. A. Norstedt & Söner 52
Hubendick, Differential- och integralkalkyl; Odhe, Skogen blir kläder; Zischka. Kampen om bomullen; Freuchen, Kemisk Potential og andre fysisk-kemiske Emner; Knöös, Elementär lärobok i kemi; Berg-Hagström, Räknelära II; Angerer, Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen 116
Olösta gåtor och aktuella problem; Aspelin, Tankelinjer och trosformer; Oxenstierna, Sannolikhetens filosofi; Lund-Rasmussen, Kemi for Gymnasiet; Eriksen-Pedersen, Astronomi for Gymnasiet; Zero, 60 trigonometriska ekvationer 196
Nodenmark, Anders Celsius; Beckman-Jenvall, Astronomi; Kallmann, Einführing in die Kernphysik; Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz och Von der Pythagoreischen Gleichung zum Fermatschen Problem; Lietzmann-Trier, Wo steckt der Fehler?; Zacharias, Der Parallellenproblem und seine Lösung;
Svenskt inköpsregister 1937 275

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 527 55.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16[IV], Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Heltalsmånghörningar.

Av AGNE WAHLGREN.

En månghörning kallas i det följande en heltalsmånghörning, om mätetalen för samtliga sidor och diagonaler äro hela tal. Här skall endast sökas månghörningar, som kunna inskrivas i en cirkel; det förutsättes ej, att radiens mätetal skall vara rationellt.

I en triangel med rationella sidor måste enligt cosinussatsen och sinussatsen vinklarnas cosinus vara rationella tal och alla vinklarnas sinus innehålla samma irrationella faktor $\sqrt{k}$ (som naturligtvis även kan vara $= 1$). För en dylik vinkel är

$$\sin u = \frac{2p\sqrt{k}}{n}, \quad \cos u = \frac{m}{n},$$

där m är negativt för en trubbig vinkel. För en vinkel i en triangel är p positivt; men för att erhålla generella resultat antaga vi, att även p kan vara negativt. Nämnaren n kan vara jämn, så att faktorn 2 kan förkortas bort. På samma sätt som man härleder formlerna för sidorna i en rätvinklig heltalstriangel, får man här:

$$4kp^2 = (n + m)(n - m) = 2r \cdot 2s;$$

$$r = k_1a^2, \; s = k_1'b^2, \; p = ab, \; k = k_1k_1';$$

$$\sin u = \frac{2ab\sqrt{k}}{k_1a^2 + k_1'b^2}, \quad \cos u = \frac{k_1a^2 - k_1'b^2}{k_1a^2 + k_1'b^2}. \tag{1}$$

Lätt inses, att man ej förlorar någon vinkel genom antagandet, att k_1a och $k_1'b$ äro relativa primtal. [Ty om $k_1 = gg_1$ och $b = gb_1$, blir nämnaren efter förkortning $g_1a^2 + gk_1'b_1^2$.]

Om båda dessa tal äro udda, kunna bråken förkortas med 2; eljest är ingen förkortning möjlig. I det följande antagas k_1a och $k_1'b$ vara relativa primtal i uttrycken för de primärt valda vinklarna u_i. Men härav följer ej, att detsamma gäller för de därur härledda vinklarna v_i och w_i. Låter man a och b samt k_1 och k_1' byta plats, byter cosinus tecken och u övergår till supplementvinkeln.

Har man för två vinklar:[1]

$$\left.\begin{aligned} \sin u_1 &= \frac{2a_1b_1\sqrt{k}}{k_1a_1^2 + k_1'b_1^2} = \frac{2a_1b_1\sqrt{k}}{S_1}, \\ \sin u_2 &= \frac{2a_2b_2\sqrt{k}}{k_2a_2^2 + k_2'b_2^2} = \frac{2a_2b_2\sqrt{k}}{S_2}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

där

$$k_1 = g_1g_2,\ k_1' = g_3g_4,\ k_2 = g_1g_3,\ k_2' = g_2g_4,$$
$$g_1g_2g_3g_4 = k,$$

erhålles för $v = u_2 + u_1$:

$$\left.\begin{aligned} \sin v &= \frac{2cd\sqrt{k}}{g_2g_3c^2 + g_1g_4d^2} = \frac{2cd\sqrt{k}}{T}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

där

$$c = g_1a_1a_2 - g_4b_1b_2,\ d = g_2a_1b_2 + g_3a_2b_1,\ T = S_1S_2.$$

För vinkeln $v' = u_2 - u_1$ erhålles:

$$\left.\begin{aligned} \sin v' &= \frac{2c'd'\sqrt{k}}{g_2g_3c'^2 + g_1g_4d'^2} = \frac{2c'd'\sqrt{k}}{T'}, \end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

där

$$c' = g_1a_1a_2 + g_4b_1b_2,\ d' = g_2a_1b_2 - g_3a_2b_1,$$
$$T' = S_1S_2 = T.$$

Vi antaga nu, att en triangel innehåller två spetsiga vinklar u_1 och u_2, bestämda av formlerna (2). Vi låta den större

[1] I det följande skall alltid till uttrycket för sinus tänkas tillfogat motsvarande uttryck enligt (1) för cosinus.

vinkeln vara u_2. Den tredje vinkeln blir $180^\circ - v$, och dess sinus anges av formlerna (3). Man får en heltalstriangel T_1 med dessa vinklar, om man såsom triangelns sidor väljer

$$x_1 = a_1 b_1 S_2, \quad x_2 = a_2 b_2 S_1, \quad y = cd. \tag{4}$$

Detta är kanske icke den minsta heltalstriangeln, ty uttrycken för x_1, x_2 och y kunna innehålla en gemensam faktor. Radien R i den omskrivna cirkeln C blir

$$R = \frac{S_1 S_2}{4\sqrt{k}} = \frac{T}{4\sqrt{k}}. \tag{5}$$

För $k = 1$ blir radien (och även triangelns yta) rationell, och man erhåller samma formler för en heltalstriangels sidor, som angivits i en uppsats av KUYLENSTIERNA i denna tidskrift, årg. 17, sid. 214.

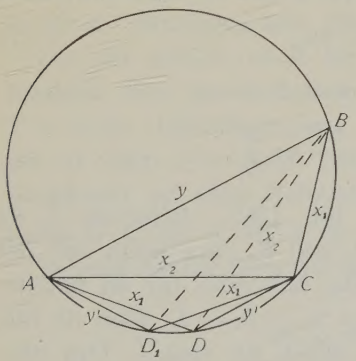


Fig. 1.

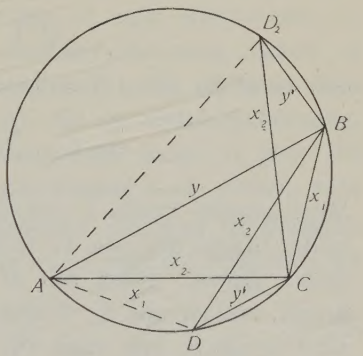


Fig. 2.

I cirkeln C får man även en annan heltalstriangel T_2, vars vinklar äro u_1, $180^\circ - u_2$ och v'. Dess sidor bliva x_1, x_2 och $y' = c'd'$. Placeras de båda trianglarna T_1 och T_2 med sidan x_2 gemensam, erhålles fyrhörningen $ABCD$ eller $ABCD_1$ (fig. 1). Väljes åter sidan x_1 gemensam, erhålles $ABCD$ eller AD_2BC (fig. 2). Men längden av BD_1 eller AD_2 blir ej ett helt tal, ty omkretsvinkeln blir $2u_1$ eller $2u_2$, och dess sinus får enligt formeln för sin $2u$ faktorn S_1^2 eller S_2^2 i nämnaren.

Antagas nu S_1 och S_2 vara primtal, är enligt talteorien (a_1, b_1) det enda par positiva hela tal, för vilket den kvadratiska formen

$$f(x, y) = k_1x^2 + k_1'y^2 \tag{6}$$

antar värdet S_1, och övriga former f, där uppdelningen av k i faktorerna k_1 och k_1' är en annan, kunna ej ge talet S_1.[1] Det vore tänkbart, att man kunde finna ett värdepar, för vilket någon av formerna (6) antoge värdet $2S_1$, och man skulle då få en ny vinkel U, vars sinus efter förkortning med 2 finge nämnaren S_1. Men enligt anmärkningen vid ekv. (1) måste då k vara udda. Och om k är udda och större än 1, kunna ej både S_1 och $2S_1$ framställas under formen (6), så länge S_1 är ett primtal. Om $k = 1$ och $S_1 > 2$, blir $(a_1 + b_1, a_1 - b_1)$ den enda positiva lösningen till

$$x^2 + y^2 = 2S_1, \tag{7}$$

och man får efter förkortning med 2:

$$\sin U = \frac{a_1^2 - b_1^2}{S_1} = \frac{M}{S_1}.$$

Motsvarande korda i cirkeln C blir $\frac{1}{2}MS_2$. Eftersom S_1 är udda, måste det ena av talen a_1 och b_1 vara udda och det andra jämnt. Alltså blir M udda, och man får en heltalskorda, endast om $S_2 = 2$, d. v. s. $a_2 = b_2 = 1$. Men då blir $\sin U = \sin v$, och man får ej någon ny vinkel. Om däremot S_2 är udda, får man en heltalskorda, först om man fördubblar radien, d. v. s. väljer $T = 2S_1S_2$ i formeln (5). Men då innehåller T tre primfaktorer; till detta fall åter-

[1] I det följande komma några satser ur talteorien att åberopas: Om vi betrakta $(\pm a, \pm b)$ såsom *en* lösning till $f(x, y) = S$, finns för ett givet k-värde högst *en* lösning till samtliga ekvationer av denna form, om S är ett primtal. Är S en produkt av r olika udda primtal, finnas högst 2^{r-1} lösningar. Likaså är antalet lösningar till samtliga ekvationer $f(x, y) = 2S$ högst 2^{r-1}. Men om k är udda och > 1, är sammanlagda antalet lösningar till *båda* ekvationerna högst 2^{r-1}; varje lösning till den ena så att säga utesluter en lösning till den andra. Om däremot $k = 2k_1k_1'$, motsvaras varje lösning (a, b) till $2k_1x^2 + k_1'y^2 = S$ av en lösning $(2a, b)$ till $k_1x^2 + 2k_1'y^2 = 2S$.

komma vi i det följande. Om slutligen $S_1 = 2$, finnes ingen lösning till ekv. (7) utom $(0, 2)$ eller $(2, 0)$.

Vidare äro (c, d) och (c', d') de enda positiva heltalsvärden, som i någon av formerna (6) ge talet S_1S_2. Och liksom förut finna vi, att några nya vinklar ej kunna erhållas med användning av nämnaren $2S_1S_2$. Vinklarna u_1, u_2, v, v' och deras supplementvinklar äro således de enda, som kunna förekomma i heltalstrianglar, inskrivna i cirkeln C. Problemet att finna en heltalsfyrhörning i cirkeln C har således endast den triviala lösningen: det likbenta parallelltrapetset $ABCD$. För $S_2 = 2$ övergår fyrhörningen till en rektangel. [Fig. 1 och 2 svara mot fallet: $k = 1$, $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $S_1 = 17$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $S_2 = 5$, varav $c = 7$, $d = 6$, $c' = 9$, $d' = 2$. Efter division med 2 bliva sidorna $x_1 = 10$, $x_2 = 17$, $y = 21$, $y' = 9$ och $R = 85 : 8$. Slutligen blir $BD_1 = 300 : 17$ och $AD_2 = 102 : 5$.]

För att $ABCD_1$ skall bli en heltalsfyrhörning, måste vi förstora den genom att i uttrycket (5) för radien välja $T = S_1^2S_2$. Likaså övergår AD_2BC till en heltalsfyrhörning, om vi välja $T = S_1S_2^2$. Men härigenom ledas vi över till problemet att söka heltalsmånghörningar i en cirkel, vars radie är $T : 4\sqrt{k}$, där T är en produkt $S_1S_2S_3$ av tre primtal.

Vi utgå därför från tre vinklar u_1, u_2 och u_3, bestämda av

$$\sin u_i = \frac{2a_ib_i\sqrt{k}}{S_i}. \tag{8}$$

Vi sätta

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 + u_2, \quad v_2 = u_1 + u_3, \quad v_3 = u_2 + u_1, \\ v_1' &= u_3 - u_2, \quad v_2' = u_1 - u_3, \quad v_3' = u_2 - u_1, \\ w_0 &= u_1 + u_2 + u_3, \quad w_1 = u_2 + u_3 - u_1, \\ w_2 &= u_3 + u_1 - u_2, \quad w_3 = u_1 + u_2 - u_3. \end{aligned}$$

Alla dessa vinklars sinus beräknas enligt formlerna (3) och (3 a), och man får

$$\sin v_i = \frac{2c_id_i\sqrt{k}}{S_{i+1}S_{i+2}}, \quad \sin v_i' = \frac{2c_i'd_i'\sqrt{k}}{S_{i+1}S_{i+2}},$$

$$\sin w_i = \frac{2e_i f_i \sqrt{k}}{S_1 S_2 S_3} = \frac{2e_i f_i \sqrt{k}}{T}.$$

[Bokstavsindices tänkas vid behov minskade med 3; för $i = 2$ är således $S_{i+1} S_{i+2} = S_3 S_1$.] För korthetens skull användes beteckningen V_i för samtliga vinklarna u, v, v', w, av vilka tydligen en del äro negativa. Likaså sammanfattas talen (a_i, b_i) etc. för samtliga vinklar i beteckningen (A_i, B_i). Om nu S_1, S_2 och S_3 äro primtal, äro $(\pm A_i, \pm B_i)$ de enda heltalsvärden, för vilka någon av formerna (6), där $k_1 k_1'$ är lika med det givna talet k, antar något av värdena S_i, $S_i S_g$ eller T. Härvid bör observeras, att A_i och B_i kunna byta plats; ty (A_i, B_i) ger, insatt i (6), samma resultat som om (B_i, A_i) insättes i formen $k_1' x^2 + k_1 y^2$. Men vid detta utbyte övergår den av (A_i, B_i) bestämda vinkeln till supplementvinkeln. Om man därför bland vinklarna $\pm V_i$ utväljer de positiva, äro dessa jämte deras supplementvinklar de enda, som kunna förekomma i heltalstrianglar, inskrivna i en cirkel med radien $= T : 4\sqrt{k}$. Alla sidor och diagonaler i en i cirkeln inskriven heltalsmånghörning måste således vara kordor, vilkas omkretsvinklar äro valda bland sistnämnda vinklar. Dess hörn kunna därför erhållas, om man från en punkt på omkretsen åt båda håll avsätter bågar med dessa omkretsvinklar eller från en radie avsätter medelpunktvinklar lika med dubbla dessa vinklar. Supplementvinklarna kunna förbigås; ty att avsätta 2 $(180^\circ - V_i)$ åt ena hållet ger samma resultat som att avsätta $2V_i$ åt andra hållet. Om vi fixera en bestämd riktning såsom positiv, kunna vi således inskränka oss till att avsätta vinklarna $\pm 2V_i$. För att även den sida eller diagonal, som förbinder två sålunda erhållna punkter med varandra, skall bli en heltalslinje, måste skillnaden mellan de avsatta medelpunktsvinklarna själv vara en vinkel $\pm 2V_i$. (Avsättas t. ex. bågar, hörande till $2u_1$ och $-2v_2$, svarar bågen mellan deras ändpunkter mot vinkeln $4u_1 + 2u_3$, som ej ger någon heltalskorda.) Tydligen måste varje särskild vinkel u_i ingå med

samma tecken i de vinklar $\pm 2V_i$, vars bågar få avsättas från samma hörn. Man finner härav, att endast fyra grupper av medelpunktsvinklar äro möjliga, vardera innehållande 7 vinklar. Den första erhålles, om man låter alla tre vinklarna u ingå med plustecken i vinklarna $2V_i$, då man får gruppen:

$$G_0 = 2u_1,\ 2u_2,\ 2u_3,\ 2v_1,\ 2v_2,\ 2v_3,\ 2w_0.$$

Om u_1 ingår med minustecken, u_2 och u_3 med plustecken, får man gruppen:

$$G_1 = -2u_1,\ 2u_2,\ 2u_3,\ 2v_1,\ -2v_2',\ 2v_3',\ 2w_1.$$

De båda återstående, där u_2 resp. u_3 ingår med minustecken, kunna erhållas ur G_1 genom cyklisk permutation av indices:

$$G_2 = 2u_1,\ -2u_2,\ 2u_3,\ 2v_1',\ 2v_2,\ -2v_3',\ 2w_2;$$
$$G_3 = 2u_1,\ 2u_2,\ -2u_3,\ -2v_1',\ 2v_2',\ 2v_3,\ 2w_3.$$

Ett teckenbyte för samtliga vinklar ger naturligtvis samma hörn eller om man så vill dess spegelbild. Drager man kordorna till de från ett hörn avsatta bågarna och sammanbinder deras ändpunkter, får man en åttahörning (fig. 3). Det är tydligt, att denna måste få en viss regelbundenhet, eftersom endast fyra olika hörn äro möjliga. Om de från punkten P_1 avsatta bågarna motsvara gruppen G_0 och deras ändpunkter äro P_2, P_3 ... P_8, bli vinkelavstånden mellan P_1 och mittpunkterna av bågarna P_1P_8, P_2P_5, P_3P_6, P_4P_7 resp. w_0, $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2$, $u_3 + v_3$. Men dessa vinklar äro lika, varför nämnda bågars mittpunkter sammanfalla i en punkt E, varav följer, att åttahörningen blir symmetrisk kring diametern EF. (Fig. 3 svarar mot $k = 1$, $S_1 = f(4, 1) = 17$, $S_2 = f(2, 1) = 5$, $S_3 = f(3, 2) = 13$. De mot vinklarna u, v, v', w svarande sidorna äro betecknade med resp. x, y, y', z. Medelpunktsvinklarna till y_1, y_2, z_0, z_1, z_3 äro större än 180°. Efter division med 2 äro de från P_1 dragna linjerna i nummerföljd: 130, 221, 255, 238, 275, 273, 144. Åttahörningens sidor äro med början vid P_1: 130, 117,

68, 66, 68, 117, 130, 144.) Jag överlämnar åt läsaren att undersöka, hur många olika sjuhörningar etc. man erhåller genom att utelämna ett eller flere hörn. Jag vill endast nämna, att man genom att godtyckligt utvälja fyra hörn erhåller $\binom{8}{4} = 70$ fyrhörningar. Av dessa äro $\binom{4}{2} = 6$ lik-

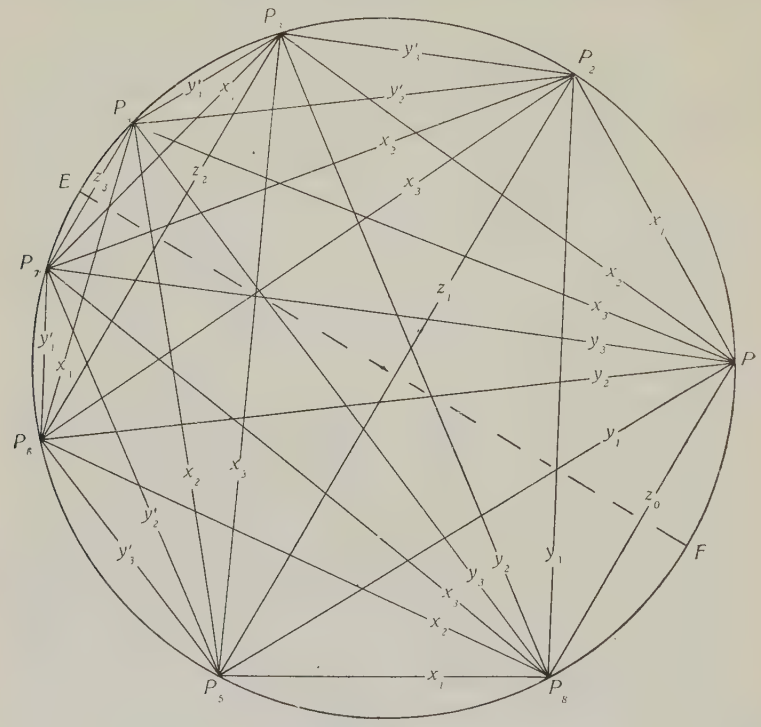


Fig. 3.

benta parallelltrapets, liggande symmetriskt kring diametern *EF*. De återstående bliva två och två varandras spegelbilder mot *EF*. Men bland dessa 32 par fyrhörningar finnas tre par likbenta parallelltrapets, beroende på att vardera av linjerna x_1, x_2, x_3 förekommer fyra gånger i figuren. Inalles blir det sålunda 9 parallelltrapets och 29 oregelbundna fyrhörningar.

Väljes $k = 1$, $S_3 = f(1, 1) = 2$, blir $y_1 = y_1'$, $y_2 = y_2'$, $z_0 = z_3$, $z_1 = z_2$. Åttahörningen får fyra diagonaler genom cirkelns medelpunkt och två mot varandra vinkelräta symmetriaxlar.

Väljes $(a_3, b_3) = (a_2, b_2)$, d. v. s. $u_3 = u_2$, blir $v_2 = v_3$, $v_1' = 0$, $w_2 = w_3 = u_1$ och $T = S_1 S_2^2$. Då sammanfalla punkterna P_3 och P_4 samt P_6 och P_7. Man får en kring en diameter symmetrisk sexhörning, i vilken utom den förstorade AD_2BC från fig. 2 finnas fyra andra oregelbundna fyrhörningar.

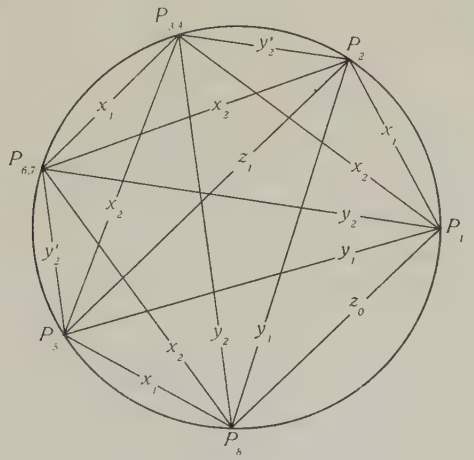


Fig. 4.

Ex. $k = 1$, $S_1 = f(4, 1) = 17$, $S_2 = S_3 = f(2, 1) = 5$. Efter förkortning med 2 bliva sexhörningens sidor: 50, 45, 50, 45, 50, 76. Diagonalerna bliva 85, 102, 105 och 104. (Fig. 4.)

Utgå vi från n vinklar u_i, definierade i analogi med ekv. (2) och äro alla S_i olika primtal, kunna vi bilda $\binom{n}{2}$ vinklar $u_i + u_g$, $\binom{n}{3}$ vinklar $u_i + u_g + u_h$, ... och $\binom{n}{n} = 1$ vinkel $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Alla dessa vinklar kunna avsättas fördubblade från samma hörn. Detta inräknat, få vi således

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$$

hörn. Vi få en i en cirkel med radien $S_1S_2 \ldots S_n : 4\sqrt{k}$ inskriven 2^n-hörning, som är symmetrisk kring en diameter.

För ett givet värde på k kunna naturligtvis ej alla primtal erhållas ur (6), medan å andra sidan många tal S kunna framställas i formen (6), utan att detta är möjligt med dess primfaktorer. Här skall endast behandlas några specialfall. Om S består av två primfaktorer, blir resultatet olika, allteftersom den ena faktorn är 2 eller båda primfaktorerna äro udda. I förra fallet antaga vi sålunda några $S_i = 2s_i$, där ej s_i men väl S_i kunna skrivas under formen (6). Då måste k, a_i och b_i vara udda. För de S_i, som ej ha faktorn 2, sätta vi $S_i = s_i$. Bildas sin $(u_i + u_g)$ enligt (3), bliva c och d jämna, om både S_i och S_g innehålla faktorn 2; sättes $c = 2\gamma$, $d = 2\delta$, får sinus efter förkortning med 4 nämnaren

$$s_i s_g = g_2 g_3 \gamma^2 + g_1 g_4 \delta^2.$$

Om däremot endast endera av S_i och S_g har faktorn 2, bliva c och d udda, och nämnaren blir

$$2 s_i s_g = g_2 g_3 c^2 + g_1 g_4 d^2.$$

I båda fallen kvarstår i täljaren den första faktorn 2. Generellt får

$$\sin (u_i \pm u_g \ldots \pm u_h) \qquad (9)$$

efter eventuell förkortning nämnaren

$$N_j = k_j A_j^2 + k_j' B_j^2 = 2 s_i s_g \ldots . s_h \text{ eller } s_i s_g \ldots , s_h .$$

Fortfarande gäller, att $2s_i$ ej kan framställas under formen (6) på mer än ett sätt och att samtliga värdepar $(\pm A_j, \pm B_j)$, erhållna genom olika kombinationer av tecknen för vinklarna i (9), äro de enda heltalsvärdena, för vilka någon av formerna (6) antager något av värdena N_j. Väljes $T = 2 s_1 s_2 \ldots s_n$ i uttrycket (5) för den omskrivna cirkelns radie, gäller således oförändrat den diskussion, som ledde till konstruktionen av en 2^n-hörning.

Ex. $k = 5$, $S_1 = 5 \cdot 1^2 + 1^2 = 6$, $S_2 = 5 \cdot 2^2 + 3^2 = 29$, $S_3 = 5 \cdot 1^2 + 3^2 = 14$, $R = 483 : 2\sqrt{5}$. Sidorna i åttahörningen bliva 184, 27, 91, 171, 44, 171, 91, 27 och diagonalerna 203, 252, 261, 116, 245, 232, 220, 272.

Om båda primfaktorerna i $S = s_1 s_2$ äro udda men $2s_1$ och $2s_2$ kunna skrivas under formen (6), återkomma vi till föregående fall. Vi antaga således, att intet av talen s_1, s_2, $2s_1$ och $2s_2$ men väl S kan ges formen (6). Då *kan* det finnas två positiva värdepar (a_1, b_1) och (a_2, b_2), med vilka S kan skrivas under formen (6). Vilka bågar kunna då avsättas från samma punkt på cirkeln? I analogi med de grupper av medelpunktsvinklar, som vi funno vid konstruktionen av åttahörningen, erhålla vi här:

$$G_0 = 2u_1,\ 2u_2,\ 2u_1 + 2u_2;\ G_1 = -2u_1,\ 2u_2,\ 2u_2 - 2u_1.$$

Men dessutom erhållas följande grupper:

$$G_2 = 2u_1,\ 2u_2,\ -2u_1,\ -2u_2;$$
$$G_3 = 2u_1,\ 4u_1,\ 2u_1 + 2u_2,\ 2u_1 - 2u_2;$$
$$G_4 = 2u_2,\ 4u_2,\ 2u_1 + 2u_2,\ 2u_2 - 2u_1.$$

Om man väljer cirkelns radie $= S^2 : 4\sqrt{k}$, ge de båda förra grupperna ett heltalsparallelltrapets, motsvarande det i fig. 1 och 2 erhållna. De senare grupperna ge en heltalsfemhörning, symmetrisk kring diametern från den punkt, varifrån bågarna G_2 avsättas. I denna finnas endast tre olika fyrhörningar. Två av dessa motsvara fyrhörningarna $ABCD_1$ och AD_2BC i fig. 1 och 2; den tredje är ett parallelltrapets. Inför man en tredje vinkel u_3, vars sinus som nämnare har primtalet S_3, och väljer man radien $= S^2 S_3 : 4\sqrt{k}$, får man som förut en åttahörning genom att från samma punkt på cirkeln avsätta dubbla vinklarna u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_0. Men därjämte får man en tiohörning genom att från en punkt P_1 i stället avsätta dubbla vinklarna u_1, u_2, $-u_1$, $-u_2$, u_3, v_1, v_2, v_1', $-v_2'$. Denna tiohörning är symmetrisk kring diametern från den punkt, vars vinkelavstånd från P_1 är u_3.

Ex. $k = 14$, $S = 15 = 14 \cdot 1^2 + 1^2 = 7 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2$, $S_3 = 23 = 14 \cdot 1^2 + 3^2$. Femhörningens sidor bliva 15, 25, 4, 25, 15, diagonalerna 30, 27 och 26, radien $225 : 4\sqrt{14}$. Tiohörningens sidor bliva med P_1 som utgångspunkt: 345, 209, 345, 105, 92, 162, 469, 162, 92, 105, radien $5175 : 4\sqrt{14}$.

Om slutligen det endast finnes en lösning till $f(x, y) = S = s_1 s_2$, kan det finnas en lösning till $f(x, y) = 2S$. [*Ett* villkor härför är att $k = 4n + 1$. Ex. $k = 17$; $21 = 17 \cdot 1^2 + 2^2$, $42 = 17 \cdot 1^2 + 5^2$.] Man kommer då till samma resultat som i föregående fall, om man vid bestämmandet av radien väljer $T = 2S^2$, resp. $T = 2S^2 S_3$.

Ett problem rörande den lineära homogena differentialekvationen av andra ordningen.

Av **S. WIGERT.**

När har ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

två integraler, vilkas produkt även är en integral?

Om y_1 och y_2 äro tvenne sådana integraler till $y'' + py' + qy = 0$, och man insätter $y_1 y_2$ i (1), så erhålles relationen

$$\frac{y_1' y_2'}{y_1 y_2} = \frac{q}{2}.$$

Funktionen $z = \frac{y'}{y}$ satisfierar den RICCATI'ska differentialekvationen

$$z' + z^2 + pz + q = 0,$$

och i vårt fall skall denna ekvation utom $z_1 = \frac{y_1'}{y_1}$ också ha

en integral $= \frac{q}{2z_1}$, d. v. s. de båda ekvationerna

$$z' + z^2 + pz + q = 0, \quad z' - 2z^2 - \left(p + \frac{q'}{q}\right)z - \frac{q}{2} = 0$$

måste ha en gemensam lösning, varav följer, att denna måste vara rot till den algebraiska likheten

$$z^2 + \frac{2pq + q'}{3q} z + \frac{q}{2} = 0,$$

vilken ger

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{6q}\left\{-(2pq + q') \pm \sqrt{(2pq + q')^2 - 18q^3}\right\}.$$

När uttrycket under kvadratrotmärket försvinner, blir $z_1 = z_2$, och y_1, y_2 äro icke fundamentalintegraler till den givna differentialekvationen.

Deriverar man ekvationen $6qz^2 + 2(2pq + q')z + 3q^2 = 0$ och inför $z' = -(z^2 + pz + q)$, så följer

$$6qz^3 + (8pq - 2q')z^2 + (6q^2 + 2p^2q - pq' - 2p'q - q'')z + \\ + 2pq^2 - 2qq' = 0,$$

och genom elimination mellan de båda ekvationerna för z erhålles *det sökta villkoret*:

$$p' + \frac{1}{3}p^2 - \frac{q'}{6q}p + \frac{q''}{2q} - \frac{2}{3}\left(\frac{q'}{q}\right)^2 - \frac{3}{2}q = 0.$$

Som man ser, leder i allmänhet bestämningen av p, då q är given, till en RICCATI'sk ekvation.

Om p och q satisfiera den nyss funna relationen, har ekvationen $y'' + py' + qy = 0$ integralerna $y_1 = e^{\int z_1 dx}$, $y_2 = e^{\int z_2 dx}$, och deras produkt

$$y_1 y_2 = e^{\int (z_1 + z_2) dx} = e^{-\int \left(\frac{2p}{3} + \frac{q'}{3q}\right) dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{q}} e^{-\frac{2}{3}\int p dx}$$

är även en integral. Vi betrakta några specialfall.

1. $q' = 0, \quad 6p' + 2p^2 - 9q = 0.$

$$\alpha)\quad q = \quad a^2 > 0\colon\quad p = \frac{3a}{\sqrt{2}} \coth \frac{a}{\sqrt{2}}(x - x_0),$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\cosh \frac{a}{\sqrt{2}}(x - x_0) \pm 1}.$$

$$\beta)\quad q = -a^2 < 0\colon\quad p = \frac{3a}{\sqrt{2}} \cot \frac{a}{\sqrt{2}}(x - x_0),$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{1 \pm \cos \frac{a}{\sqrt{2}}(x - x_0)}.$$

2. $p = 0, \quad 3qq'' - 4q'^2 - 9q^3 = 0.$

Denna differentialekvation blir lineär av första ordningen, om q'^2 tages till beroende och q till oberoende variabel, och den ger

$$q'^2 = 18q^3 + Cq^{8/3}.$$

Härur kan x fås uttryckt i q genom elementära funktioner. För $C = 0$ erhålles $q = \frac{2}{9(x - x_0)^2}$ och $y_1 = y_2 = (x - x_0)^{\frac{1}{3}}$.

Man kan f. ö. lätt ange en allmän form för p och q. När y_1 och y_2 icke äro lineärt oberoende, har ekvationen $y'' + py' + qy = 0$ en integral $y_1 = \varphi$ och en annan $y_2 = c\varphi$, varav följer, att $y_1 y_2 = c\varphi^2$, d. v. s. även φ^2 är en integral. Insättas φ och φ^2 i (1), får man två ekvationer för bestämning av p och q, och (1) antar formen

$$y'' - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\right) y' + 2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 y = 0.$$

I annat fall kan man sätta $y_1 y_2 = a y_1 - c y_2$, och då finnas två integraler, φ och $\frac{\varphi}{\varphi + c}$. Man erhåller sedan på samma sätt som nyss

$$y'' - \left\{\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{2c\varphi'}{\varphi(\varphi + c)}\right\} y' + \frac{2c\varphi'^2}{\varphi^2(\varphi + c)} y = 0.$$

För $c \to \infty$ övergår denna ekvation i den förra.

Om ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$.

Av S. WIGERT.

I en uppsats uti junihäftet för 1936 av denna tidskrift har lektor H. PETRINI visat, att eventuella heltalslösningar ($\neq 0$) till ovanstående ekvation skulle vara så stora, att de »praktiskt taget äro oåtkomliga på empirisk väg». Detta kan möjligen bidraga till att någon, som »inte känner sig övertygad av de bevis, som presterats för ekvationens orimlighet», avhåller sig från att leta efter obefintliga heltalslösningar.

I själva verket har nog önskan att äga ett någorlunda kort men övertygande bevis varit förklarlig. EULERS originalavhandlingar äro skrivna på latin. En tysk version av hans algebraiska undersökningar finns visserligen i *Reclams Universal-Bibliotek,* men framställningen är ej helt tillfredsställande. Jag skall i det följande söka lämna ett bevis, som på anförda grunder kanske kan vara välkommet för en och annan. Jag begagnar här tillfället att till herrar H. PETRINI och A. WAHLGREN uttala mitt tack för flera värdefulla anvisningar, som jag under bevisets utarbetande fått mottaga.

Vi antaga x, y, z vara de absolut minsta heltalslösningar ($\neq 0$), som existera, och skola visa, att man i strid härmed kan finna andra absolut mindre lösningar. Låt oss först betrakta det fall, då z är ett jämnt tal. Emedan vi antaga x, y och z fria från gemensamma faktorer, som ju kunde bortdivideras, så måste x och y båda vara udda, och vi kunna sätta

$$x = p + q, \qquad y = p - q,$$

där p och q äro hela tal. Ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ övergår då till

$$2p(p^2 + 3q^2) = z^3,$$

och här har största gemensamma divisorn (p, q) till p och q värdet 1, varjämte $p^2 + 3q^2$ är udda, enär p och q måste ha olika paritet.

1. Antag $p \not\equiv 0 \pmod 3$. Då är även $(2p,\ p^2 + 3q^2) = 1$, ty en gemensam divisor skulle vara udda och bli en gemensam faktor till p och q, eftersom den är $\not\equiv 0 \pmod 3$. Härav följer, att både $2p$ och $p^2 + 3q^2$ äro kubiktal. För att komma vidare behöva vi en hjälpsats, som jag föredrager att bevisa efteråt för att ej nödgas avbryta framställningen. Enligt denna sats kan man, om $p^2 + 3q^2 = r^3$, alltid finna tvenne hela tal m och n, sådana, att

$$p = m(m + 3n)\ (m - 3n), \qquad q = 3n(m + n)\ (m - n),$$

och här är $m \not\equiv 0 \pmod 3$ samt $(m, n) = 1$. Om då $m + 3n$ och $m - 3n$ äro udda, så ha $2m$, $m + 3n$ och $m - 3n$ ingen gemensam faktor, varav följer, att man kan sätta

$$2m = \alpha^3, \qquad m + 3n = \beta^3, \qquad m - 3n = \gamma^3,$$

vilket ger

$$\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3.$$

Äro däremot $m + 3n$ och $m - 3n$ jämna, så har $2p$ formen $(2k)^3$, så att

$$k^3 = m\,\frac{m + 3n}{2}\,\frac{m - 3n}{2}$$

samt

$$m = \bar{\alpha}^3, \quad \frac{m + 3n}{2} = \bar{\beta}^3, \quad \frac{m - 3n}{2} = \bar{\gamma}^3,$$

d. v. s.

$$\bar{\alpha}^3 = \bar{\beta}^3 + \bar{\gamma}^3.$$

Man finner således här heltalslösningar, som äro absolut mindre än x, y, z.

2. $p \equiv 0 \pmod 3$. Om $p = 3r$, måste z ha formen $3s$, och man får en ekvation

$$\frac{2r}{3}(q^2 + 3r^2) = s^3.$$

Här är $\frac{r}{3}$ ett helt tal, ty $q^2 + 3r^2 \not\equiv 0 \pmod 3$. Likaså är $\left(\frac{2r}{3}, q^2 + 3r^2\right) = 1$, så att både $\frac{2r}{3}$ och $q^2 + 3r^2$ äro kubiktal.

Alltså blir

$$q = \mu(\mu^2 - 9\nu^2), \qquad r = 3\nu(\mu^2 - \nu^2),$$

och liksom förut inses, att 2ν, $\mu + \nu$ och $\mu - \nu$ icke ha någon gemensam divisor. Man får därför

$$2\nu = \gamma_1^3, \qquad \mu + \nu = \alpha_1^3, \qquad \mu - \nu = \beta_1^3$$

och

$$\alpha_1^3 = \beta_1^3 + \gamma_1^3.$$

Om slutligen z vore udda, så skulle x och y ha olika paritet, och om t. ex. x vore udda, så bleve ekvationen $y^3 = z^3 + (-x)^3$ av den form, som vi nyss behandlat.

Hjälpsats. Om ett udda kubiktal ($\not\equiv 0 \pmod 3$) har formen $p^2 + 3q^2$, så kan man sätta $p = m(m^2 - 9n^2)$, $q = 3n(m^2 - n^2)$, där m och n äro hela tal.

Bevis. 1. Om $a = x_1^2 + 3y_1^2$ och b en primfaktor i a samt $b = x^2 + 3y^2$, så är $\frac{a}{b} = \xi^2 + 3\eta^2$, där ξ och η äro hela tal. Ty om vi sätta

$$\xi = \frac{1}{b}(xx_1 \pm 3yy_1), \qquad \eta = \frac{1}{b}(xy_1 \mp x_1y),$$

så blir [1]

$$\xi^2 + 3\eta^2 = \frac{(x^2 + 3y^2)(x_1^2 + 3y_1^2)}{b^2} = \frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b},$$

[1] Observera, att produkten av två tal av formen $x^2 + 3y^2$ kan framställas under samma form.

och vi behöva blott visa, att ξ och η äro *hela* tal. Nu är

$$\left.\begin{aligned} by_1^2 - ay^2 &= x^2y_1^2 - x_1^2y^2 = (xy_1 - x_1y)\ (xy_1 + x_1y) \\ bx_1^2 - 3ay^2 &= x^2x_1^2 - 9y^2y_1^2 = (xx_1 + 3yy_1)\ (xx_1 - 3yy_1) \end{aligned}\right\},$$

varav synes, att b går upp i $xy_1 - x_1y$ eller $xy_1 + x_1y$ samt uti $xx_1 + 3yy_1$ eller $xx_1 - 3yy_1$. I fall b endast går upp i t. ex. $xy_1 - x_1y$, så är b även en faktor till $(xx_1 + 3yy_1)^2 + 3(xy_1 - x_1y)^2 = ab$, alltså till $xx_1 + 3yy_1$. — Följdsats: Om $a = bc$ och a har formen $x^2 + 3y^2$, men icke c, så kan ej heller b ha den.

2. Om ett udda tal $a^2 + 3b^2$, där $(a, b) = 1$, kunde ha en primtalsfaktor p, vilken icke är av formen $x^2 + 3y^2$, så skulle man kunna finna ett nytt primtal $< p$, som vore divisor till ett udda tal $\alpha^2 + 3\beta^2$, där också $(\alpha, \beta) = 1$, och detta nya primtal har ej heller formen $x^2 + 3y^2$.

Tydligen är $(a, p) = (b, p) = 1$. Vi antaga $a > \frac{p}{2}$, $b > \frac{p}{2}$ och sätta

$$a = mp + \alpha, \qquad b = np + \beta, \qquad \text{där } |\alpha| \text{ och } |\beta| \text{ äro} < \frac{p}{2}.$$

Därav följer $a^2 + 3b^2 \equiv \alpha^2 + 3\beta^2 \pmod{p}$ och $\alpha^2 + 3\beta^2 < p^2$ d. v. s. $\dfrac{\alpha^2 + 3\beta^2}{p} < p$. Då nu enligt antagande p ej har formen $x^2 + 3y^2$, så är enligt följdsatsen till del 1. av beviset antingen $\dfrac{\alpha^2 + 3\beta^2}{p}$ ett primtal, som ej heller har denna form, eller också har talet en primfaktor med samma egenskap. I varje fall har man ett primtal $< p$, som ej har formen $x^2 + 3y^2$, men går upp i $\alpha^2 + 3\beta^2$. Upprepas detta resonemang, kommer man tydligen till en motsägelse.

Vi böra här lägga märke till två saker. Dels kan (α, β) vara > 1. Men om $\begin{cases} a = \alpha'\delta \\ \beta = \beta'\delta \end{cases}$, där $(\alpha', \beta') = 1$, så blir $\alpha^2 + 3\beta^2 = \delta^2(\alpha'^2 + 3\beta'^2)$ och $\delta \not\equiv 0 \pmod{p}$, emedan annars a och β samt a och b vore delbara med p. Alltså gäller

$\alpha'^2 + 3\beta'^2 \equiv 0 \pmod{p}$ och $(\alpha', \beta') = 1$. Vidare kunde $\alpha'^2 + 3\beta'^2$ vara ett jämnt tal, men då är $\begin{cases}\alpha' = 2\mu + 1 \\ \beta' = 2\nu + 1\end{cases}$ och $\alpha'^2 + 3\beta'^2 \equiv 0 \pmod 4$. Dessutom är $\dfrac{\alpha'^2 + 3\beta'^2}{4} = \xi^2 + 3\eta^2$, där

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{\alpha' + 3\beta'}{4} = \dfrac{\mu + \nu}{2} + \nu + 1 \\ \eta = \dfrac{\alpha' - \beta'}{4} = \dfrac{\mu - \nu}{2}\end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases}\xi = \dfrac{\alpha' - 3\beta'}{4} = \dfrac{\mu - \nu - 1}{2} - \nu \\ \eta = \dfrac{\alpha' + \beta'}{4} = \dfrac{\mu + \nu + 1}{2}\end{cases}$$

äro hela tal. Av $\begin{cases}\xi - \eta = \pm\,\beta' \\ \xi + 3\eta = \alpha'\end{cases}$ följer slutligen, att $\xi^2 + 3\eta^2$ är udda och $(\xi, \eta) = 1$.

3. Antag nu talet $p^2 + 3q^2 = r^3$ givet. Alla dess primfaktorer ha formen $x^2 + 3y^2$, varav följer, att r kan skrivas $m^2 + 3n^2$, och man har

$$r^3 = p^2 + 3q^2 = (m^2 + 3n^2)^3 = M^2 + 3N^2,$$

där

$$M = m(m^2 - 9n^2), \qquad N = 3n(m^2 - n^2).$$

Här behöva vi stödja oss på en känd sats ur talteorien, vars bevis utan andra hjälpmedel än hittills använda jag f. ö. skisserar i tillägget här nedan. Det är den satsen, att talen r och r^3 ha samma antal väsentligt olika framställningar av formen $x^2 + 3y^2$. Av denna sats framgår, att p och q, som ju ge en framställning av r^3, måste vara ett av talparen M och N. Det finns således alltid heltalsvärden m och n, sådana att $p = m(m^2 - 9n^2)$, $q = 3n(m^2 - n^2)$.

En invändning, som här ligger nära till hands, är att kanske två olika framställningar av r kunde ge upphov åt samma framställning av r^3. Detta kan emellertid icke äga rum, när r är ett udda tal. Ty av

$$r = m^2 + 3n^2 = m_1^2 + 3n_1^2 \qquad (n \neq n_1)$$

och

$$N = 3n(m^2 - n^2) = \pm\, 3n_1(m_1^2 - n_1^2)$$

erhålles i strid mot förutsättningen om r

$$r(n \mp n_1) = 4(n^3 \mp n_1^3) \quad \text{samt} \quad r = 4(n^2 \pm nn_1 + n_1^2).$$

Tillägg.

1. Ett primtal p av formen $x^2 + 3y^2$ har endast en sådan framställning, bortsett från tecknen för x och y, och tydligen är $(x, y) = 1$.

Antag $p = x^2 + 3y^2 = x_1^2 + 3y_1^2$. Då blir

$$\frac{x_1^2 + 3y_1^2}{x^2 + 3y^2} = 1 = \xi^2 + 3\eta^2, \text{ där } \begin{cases} \xi = \dfrac{xx_1 + 3yy_1}{p} \\ \eta = \dfrac{xy_1 - yx_1}{p} \end{cases} \text{ eller}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{xx_1 - 3yy_1}{p} \\ \eta = \dfrac{xy_1 + yx_1}{p} \end{cases} \text{ äro hela tal, och emedan } \begin{cases} \xi = \pm 1 \\ \eta = 0 \end{cases}, \text{ erhålles}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x \\ y_1 = \lambda y \end{cases}, \quad \frac{\lambda(x^2 + 3y^2)}{p} = \pm 1 \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x_1 = \quad \lambda x \\ y_1 = -\lambda y \end{cases}, \quad \lambda = \pm 1.$$

2. För en primtalskvadrat p^2 gäller $p^2 = x_2^2 + 3y_2^2$, där $\begin{cases} x_2 = x^2 - 3y^2 \\ y_2 = 2xy \end{cases}$. Om då $p^2 = A_2^2 + 3B_2^2$, så blir

$$p = \frac{A_2^2 + 3B_2^2}{x^2 + 3y^2} = \xi^2 + 3\eta^2,$$

där

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{xA_2 + 3yB_2}{p} \\ \eta = \dfrac{xB_2 - yA_2}{p} \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} \xi = \dfrac{xA_2 - 3yB_2}{p} \\ \eta = \dfrac{xB_2 + yA_2}{p} \end{cases}$$

äro hela tal. Eftersom nu $\xi = \pm x$, $\eta = \pm y$, så följer, att antingen

$$\begin{cases} A_2 = \pm (x^2 - 3y^2) = \pm x_2 \\ B_2 = \pm 2xy \qquad\quad = \pm y_2 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} A_2 = \pm (x^2 + 3y^2) = \pm p \\ B_2 = 0 \end{cases},$$

av vilka lösningar den senare ej uppfyller villkoret $(A_2, B_2) = 1$. Gå vi nu till p^3, så ha vi $p^3 = x_3^2 + 3y_3^2$, där

$$x_3 = x(x^2 - 9y^2), \quad y_3 = 3y(x^2 - y^2),$$ [1]

och man får liksom nyss $p^2 = \dfrac{x_3^2 + 3y_3^2}{x^2 + 3y^2} = \xi^2 + 3\eta^2$, där

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{xA_3 + 3yB_3}{p} \\ \eta = \dfrac{xB_3 - yA_3}{p} \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} \xi = \dfrac{xA_3 - 3yB_3}{p} \\ \eta = \dfrac{xB_3 + yA_3}{p} \end{cases}$$

äro hela tal samt $\xi = \pm x_2$, $\eta = \pm y_2$. Härav erhålles antingen

$$\begin{cases} A_3 = \pm x(x^2 - 9y^2) = \pm x_3 \\ B_3 = \pm 3y(x^2 - y^2) = \pm y_3 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} A_3 = \pm x(x^2 + 3y^2) = \pm px \\ B_3 = \pm y(x^2 + 3y^2) = \pm py \end{cases}$$

så att endast den första lösningen satisfierar $(A_3, B_3) = 1$.

På detta sätt kan man steg för steg komma fram till, att en primtalspotens v. s. h. endast på ett sätt kan skrivas $x^2 + 3y^2$, där $(x, y) = 1$, då man bortser från tecknen för x och y.

3. Produkten pp' av två olika udda primtal $x^2 + 3y^2$ och $x'^2 + 3y'^2$ har två olika framställningar: $(xx' \pm 3yy')^2 + 3(xy' \mp x'y)^2$. Några andra väsentligt olika framställningar finnas icke. Ty om $pp' = m^2 + 3n^2$, så blir $p = x^2 + 3y^2 = \dfrac{m^2 + 3n^2}{x'^2 + 3y'^2} = \xi^2 + 3\eta^2$, och härur får man som förut lösningarna

$$\begin{cases} m = \pm (xx' - 3yy') \\ n = \pm (yx' + xy') \end{cases}, \quad \begin{cases} m = \pm (xx' + 3yy') \\ n = \pm (yx' - xy') \end{cases}.$$

Kombineras de här bevisade resultaten får man satsen: Om $p_1 \ldots p_k$ äro primtal av formen $x^2 + 3y^2$, så ha produkterna $p_1 \ldots p_k$ och $p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ samma antal väsentligt olika framställningar med $(x, y) = 1$, nämligen 2^{k-1}.

[1] I allmänhet: $x_n + y_n\sqrt{3}\,i = (x + y\sqrt{3}\,i)^n$.

Tredjegradsfunktionens maximum och minimum.

En tredjegradsfunktions maximum och minimum kunna erhållas utan användning av derivatan, om man ansluter till den bekanta trigonometriska metoden att lösa casus irreducibilis (se t. ex. Eurenius, Plan trigonometri).

Genom en substitution $x = z - a$ kan man alltid åstadkomma, att andragradstermen försvinner, så att man kan inskränka sig till att studera funktionen

$$y = z^3 - A^2 z.$$

Genom substitutionen $z = k \sin v$, där k är en tillsvidare obestämd konstant, erhålles

$$y = \frac{k^3}{4}\left(4 \sin^3 v - \frac{4A^2}{k^2} \sin v\right).$$

Väljes nu k, så att

$$\frac{4A^2}{k^2} = 3 \quad \therefore k = \frac{2A}{\sqrt{3}},$$

erhålles enligt en bekant trigonometrisk formel

$$y = -\frac{k^3}{4} \sin 3v = -\frac{2A^3}{3\sqrt{3}} \sin 3v \tag{1}$$

för

$$z = \frac{2A}{\sqrt{3}} \sin v. \tag{2}$$

Genom substitutionen (2) inskränkes kurvan till den del, som ligger mellan punkterna $\left(-\frac{2A}{\sqrt{3}} \middle| -\frac{2A^3}{3\sqrt{3}}\right)$ och $\left(\frac{2A}{\sqrt{3}} \middle| \frac{2A^3}{3\sqrt{3}}\right)$. Man erhåller alla punkter på denna del, om v varierar mellan $-90°$ och $90°$. Funktionen i (1) får sitt maximum för $3v = -90° + n.360°$. Då blir $v = -30° + n.\ 120°$, varav $v_1 = -30°$, $v_2 = 90°$, $v_3 = 210°$. Värdet v_1 ger

$$z = -\frac{A}{\sqrt{3}}, \quad y_{\max} = \frac{2A^3}{3\sqrt{3}};$$

v_2 ger en av de ovannämnda gränspunkterna; v_3 ger samma z-värde som v_1 och faller för övrigt utanför det angivna intervallet för v. På samma sätt erhålles minimum för $3v = 90° + n.360°$; $v_1 = 30°$, $v_2 = 150°$, $v_3 = -90°$, av vilka v_1 ger

$$z = \frac{A}{\sqrt{3}}, \quad y_{\min} = -\frac{2A^3}{3\sqrt{3}};$$

v_2 ger samma värde som v_1 och v_3 ger den andra av de ovan angivna gränspunkterna. *Hj. Hammarström.*

De viktigaste konstruktions- och drifts-egenskaperna hos likströms-maskinerna.[1] II.

Av AXEL NORDHULT.

C. Förluster och verkningsgrad.

9. *Förlusterna* indelas i: a) kopparförluster eller ohmska förluster, b) järnförluster, c) friktionsförluster.

a. *Kopparförlusterna* ($= P_{Cu}$) utgöras av strömvärmet i ankarlindning, magnetlindning och i borstarna. Förlusterna i kopparledarna kunna beräknas enligt Joules lag.

b. *Järnförlusterna* ($= P_{Fe}$) utgöras av hysteresisförluster och virvelströmsförluster. Hysteresisförlusterna ($= P_h$) uppstå vid ommagnetiseringen av järnet i ankarets plåtlameller. De kunna beräknas enligt formeln

$$P_h = c_1 \nu B^{1,6} V,$$

där ν är periodtalet, B den magnetiska induktionens maximivärde, V järnets volym och c_1 en experimentellt bestämd materialkonstant, vars värde man nedbringat genom att legera järnet med andra ämnen särskilt kisel.

Virvelströmsförlusterna ($= P_v$) uppstå i alla de metalliska ledare, där magnetfältet är variabelt, d. v. s. i ankarlindningen och i ankarringen, som är tillverkad av plåtpaket för att nedbringa just dessa förluster. Förlusterna i plåten kunna beräknas enligt den teoretiskt härledda formeln

$$P_v = c_2 \nu^2 B^2 d^2 V,$$

[1] Första hälften av denna uppsats återfinnes i tidskriftens dec.-häfte 1936. Hela uppsatsen (38 sid.) finnes att tillgå i särtryck; se första annonsbladet i detta häfte.

där v, B och V ha ovan angivna betydelse, d är plåttjockleken och c_2 en materialkonstant.

c. *Friktionsförlusterna* ($= P_{fr}$) utgöras av luftfriktion, lager- och borstfriktion. Även dessa förluster kunna beräknas enligt vissa för ändamålet härledda formler. Dessa förluster äro oberoende av den från maskinen uttagna effekten, de bero endast av ankarets rotationshastighet och växa ganska snabbt med tilltagande varvtal.

10. *Verkningsgraden* $\eta = \frac{\text{Avgiven effekt}}{\text{Tillförd effekt}} = \frac{P_2}{P_1}$. Om man med ΣF betecknar samtliga förluster, d. v. s.

$$P_{Cu} + P_{Fe} + P_{fr} = \Sigma F, \text{ fås}$$

$$\text{för en generator } \eta = \frac{E_p I}{E_p I + \Sigma F}$$

$$\text{och för en motor } \eta = \frac{E_p I - \Sigma F}{E_p I},$$

där E_p är maskinens polspänning och I den strömstyrka, som generatorn levererar eller motorn mottager.

Om förlusterna äro kända, kan verkningsgraden beräknas för olika belastning av maskinen. Vi skola ange den ungefärliga formen av verkningsgradskurvan och välja därvid en shuntgenerator.

I fig. 26 äro de olika förlusterna jämte deras summa ΣF, avgiven effekt och verkningsgrad framställda som funktioner av den levererade strömmen I. Då den i generatorn inducerade spänningen är proportionell mot det magnetiska fältet, inses att såväl hysteresis- som virvelströmsförlusterna äro proportionella mot den inducerade elektromotoriska kraften. Då polspänningen hålles konstant genom lämplig magnetisering och spänningsfallet i ankaret är litet, kunna P_h och P_v anses konstanta. Eftersom varvtalet är konstant, blir även P_{fr} konstant. Kopparförlusterna uppstå dels i magnetlindningen ($= P_{Cu,\, m}$) och dels i ankarlindningen inklusive lindningen i ev. förefintliga

kommuteringspoler ($= P_{Cu.\,a}$). $P_{Cu.\,m} = \frac{E_p^2}{R_m} =$ konstant och $P_{Cu.\,a} = R_a I_a^2$. Då $I = I_a - I_m$ och I_m är liten jämförd

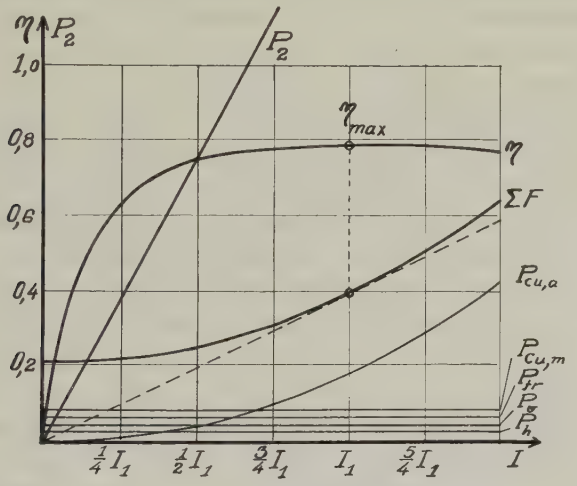


Fig. 26.

Shuntgeneratorns förluster och verkningsgrad. Förluster på grund av hysteresis (P_h), virvelströmmar (P_v), friktion (P_{fr}), kopparförluster i magnetlindningarna ($P_{Cu,\,m}$) och ankare ($P_{Cu,\,a}$); totala förluster (ΣF), verkningsgrad (η) och avgiven effekt (P_2).

med I_a, inses att kopparförlusterna i diagrammet ungefär representeras av parabeln $P_{Cu} = \frac{E_p^2}{R_m} + R_a I^2$. Den avgivna effekten $P_2 = E_p I$ representeras av en rät linje. Verkningsgradskurvan kan nu beräknas enligt formeln

$$\eta = \frac{E_p I}{E_p I + \Sigma F} = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma F}{E_p I}}.$$

Kurvan utgår från origo, stiger först ganska starkt, varefter stigningen minskas och uppnår ett maximum, vars läge bestämmes därav, att $\frac{\Sigma F}{I}$ antar ett minimivärde. Man finner detta värde genom att från origo draga en tangent till kur-

van ΣF (Se fig. 26). De elektriska maskinerna konstrueras så, att verkningsgradskurvans maximipunkt sammanfaller med eller faller i närheten av maskinens normala belastning. Då maximipunkten passerats, minskas verkningsgraden på grund av de starkt ökade kopparförlusterna.

För motorer erhålles verkningsgraden på liknande sätt. Då hastigheten här är variabel, äro friktionsförlusterna ej konstanta. Hos shuntmotorn är variationen ganska ringa, men hos seriemotorn ökas hastigheten och alltså även friktionsförlusterna avsevärt, då belastningen minskas. Av verkningsgradskurvans form framgår, hur oekonomiskt det med hänsyn till energiförbrukningen är, att för ett visst effektbehov använda en motor avsedd för en väsentligt större effekt.

11. *Bestämning av mindre motorers verkningsgrad genom utbromsning.*

Mindre motorers verkningsgrad kan bestämmas genom bromsprov. Ett bromsband, lämpligen en sadelgjord, läggs över en på motoraxeln fästad bromsskiva försedd med sidoflänsar, som hindra bandet att glida av. Bromsskivan bör även utformas så, att den invändigt kan delvis fyllas med kylvatten. För variation av belastningen kunna bromsbandets båda ändar anslutas till var sin fjädervåg, varå spänningen i bandets båda ändar avläses. En annan lämplig anordning har angivits i fig. 27. I bandets ändar ha upphängts två tyngder S_1 kgf, som kan varieras, och P kgf, som vilar på en hushållvåg. Vågens utslag antages vara V kgf. Spänningarna i bandets båda ändar äro S_1 kgf och $S_2 = P - V$ kgf. Den resulterande periferikraften, som verkar bromsande på skivan är då $S_1 - S_2$ kgf. Om broms-

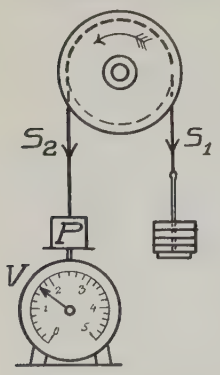


Fig. 27.

Anordning för bromsning av mindre motorer.

skivans radie är r meter och det med tachometer avlästa varvtalet är n varv per minut, blir den utbromsade effekten

$$P_2 = 2\pi r \frac{n}{60}(S_1 - S_2)\ ^{\text{kgm}}/_{\text{sek}} = 9{,}81 \frac{\pi r n}{30}(S_1 - S_2) \text{ watt.}$$

Den tillförda elektriska effekten P_1 uppmätes med volt- och ampèremeter. Man har $P_1 = E_p I$ watt och $\eta = \frac{P_2}{P_1}$. Verkningsgraden uttryckes ofta i procent d. v. s. $\eta = 100 \cdot \frac{P_2}{P_1}$. Verkningsgradskurvan uppritas vanligen som en funktion av den utbromsade effekten.

12. *Bestämning av tomgångsförlusterna.*

Med tomgångsförluster förstå vi här samtliga de förluster, som uppstå, då maskinen vid normalt varvtal och normal magnetisering drives i tomgång, minskade med maskinens kopparförluster. Tomgångsförlusterna utgöras av maskinens friktionsförluster och järnförluster, ty friktionen beror endast av varvtalet och järnförlusterna endast av magnetfältets styrka och varvtalet. För bestämning av dessa förluster köres maskinen som motor i tomgång med normalt varvtal och en inducerad elektromotorisk kraft lika med den vid belastning inducerade. Om man antar, att maskinen är en shuntmotor på 5 kW och 200 V och ankarets motstånd $R_a = 0{,}2$ ohm, så är den inducerade emk. $= 200 - 0{,}2 \cdot 25 = 195$ V. Om motorn kräver en tomgångsström $I_o = 3$ A, skall dess polspänning vara $E_{p_o} = 195 + 0{,}2 \cdot 3 = 195{,}6$ V, för att den inducerade emk. i tomgång skall vara lika med den vid belastning inducerade. Fig. 28 anger kopplingsschemat. Det rätta varvtalet inregleras (se nedan) med motståndet R_1 och den riktiga emk. inregleras med R_2.

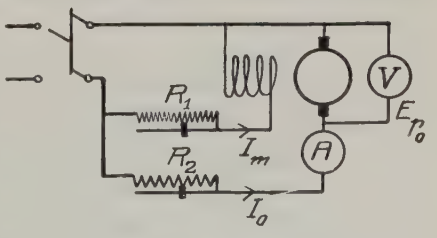


Fig. 28.

Schema för bestämning av tomgångsförluster.

För att erhålla tomgångsförlusterna har man att från den nu tillförda effekten subtrahera de små kopparförlusterna i ankaret i tomgång. Alltså tomgångsförlusterna $P_o = E_{p_o} I_o - - R_a I_o^2$. Då kopparförlusterna lätt kunna beräknas, skänker ovanstående bestämning av tomgångsförlusterna en möjlighet att genom en kombinerad mätning av friktions- och järnförluster och beräkning av kopparförlusterna bestämma verkningsgraden för maskiner med så stor effekt, att verkningsgraden ej lämpligen kan mätas genom utbromsning.

En större maskins tomgångsförluster kunna även bestämmas med tillhjälp av en mindre hjälpmotor. Med den mindre maskinen som motor drives den större maskinen som generator i tomgång med normalt varvtal och separat magnetiseringsström avpassad så, att den inducerade emk. blir lika med den vid belastning inducerade emk. Tomgångsförlusterna äro uppenbarligen lika med hjälpmotorn tillförd effekt minskad med hjälpmotorns förluster, som dessförinnan bestämts. Förlusterna i en eventuellt använd rem uppgå till cirka 4 % av den genom remmen överförda effekten. Metoden ger något för små järnförluster d. v. s. för hög verkningsgrad, ty vid maskinens belastning åstadkommer ankarreaktionen en höjning av maximiinduktionen i vissa delar av ankaret och därmed även av såväl hysteresis- som virvelströmsförlusterna.

Som redan nämnts, erhållas kopparförlusterna lätt genom beräkning av det jouleska värmet i ankar-, kommuteringsoch magnetlindning.

13. *Återarbetsmetoden.*

Om man förfogar över två lika maskiner, kunna de mekaniskt och elektriskt sammankopplas i enlighet med schemat i fig. 29. Vi antaga för enkelhets skull, att nätspänningen är lika med maskinernas normala polspänning. Med strömbrytaren K bruten och R_1 urkopplat startas maskinen M som motor, varvid strömrusningen i starten begränsas med förkopplingsmotståndet R, som successivt urkopplas.

Med R_1 regleras varvtalet till det normala (se nedan). Härefter regleras R_2 så, att polspänningen hos generatorn G blir densamma som motorns polspänning E_p, då brytaren K slås till. Generatorns ankarlindning är nu strömlös, men genom att minska R_2 ökas den inducerade emk i generatorn, varigenom den levererar strömmen I_2. Härigenom måste större effekt tillföras generatorn genom axeln från motorn. Dennas ökade strömbehov erhålles till största delen genom generatorns strömleverans. Genom reglering av R_2 kan maskinernas belastning godtyckligt varieras. Hela den i generatorn utvecklade energien återlevereras till mo-

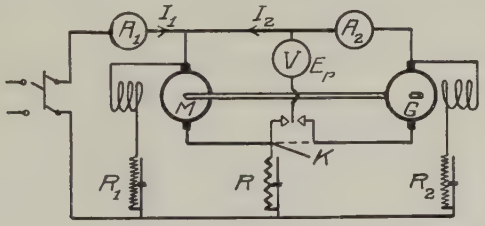


Fig. 29.

Kopplingsschema för återarbetsmetoden.

torn. Från nätet uttages endast den energi, som erfordras att täcka förlusterna i båda maskinerna. Eftersom maskinernas konstruktion är densamma, är också verkningsgraden (η) densamma för båda maskinerna. Den effekt, som motorn mottager, är $E_p(I_1 + I_2)$ och den av motorn avgivna effekten är $\eta E_p(I_1 + I_2) =$ den effekt generatorn mottager. Den av motorn avgivna effekten är alltså $= \eta^2 E_p(I_1 + I_2)$. Men denna effekt är även $= E_p I_2$; alltså:

$$\eta^2 E_p(I_1 + I_2) = E_p I_2, \text{ varav } \eta = \sqrt{\frac{I_2}{I_1 + I_2}}.$$

14. *Utlöpningsmetoden.*

Denna metod, som avser en bestämning av friktionsförlusterna, är ur fysikalisk synpunkt intressant. Varvtalet

drives upp över det normala, varefter drivkraften frånkopplas. Varvtalet, som på grund av friktionen successivt minskas, avläses med bestämda tidsmellanrum, varigenom en utlöpningskurva med varvtalet som funktion av tiden kan uppritas. En dylik kurva är angiven i fig. 30. Vi antaga, att varvtalet är n varv per sekund, vinkelhastigheten ω, ankarets tröghetsmoment K kg $\times$ m^2, ankarets rotationsenergi Q och tiden t sek. Man har $\omega = 2\pi n$ och $Q = \frac{1}{2} K\omega^2 = 2\pi^2 K n^2$ kgm. I ett visst ögonblick är ankarets *tillskott* av rotationsenergi per sek. $= \frac{dQ}{dt}$ och alltså *förlusten* per sek. av rotationsenergi $= -\frac{dQ}{dt}$, som enligt energiprincipen är lika med friktionsförlusterna i samma ögonblick. Alltså

$$P_{fr} = -\frac{dQ}{dt} = -4\pi^2 K n \frac{dn}{dt} \text{ kgm} =$$

$$= -9{,}81 \cdot 4\pi^2 K n \frac{dn}{dt} \text{ watt}.$$

Av fig. 30 framgår, att $n\frac{dn}{dt} = n \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -n \operatorname{tg}\alpha = -s$, där s är subnormalen BC. Alltså $P_{fr} = 9{,}81 \cdot 4\pi^2 Ks$. Friktionsförlusterna äro alltså i varje ögonblick proportionella mot subnormalen s. Subnormalens längd är emellertid beroende av valet av skala för varvtal och tid i diagrammet. Förutsättningen är därför, att 1 cm utefter ordinataxeln representerar lika många varv per sek. som 1 cm utefter abskissaxeln representerar sekunder. Väljas skalorna på detta sätt, blir emellertid kurvan alltför brant, varför man väljer olika skalor för ordinatan och abskissan och inför en korrektionsfaktor, som reducerar subnormalens

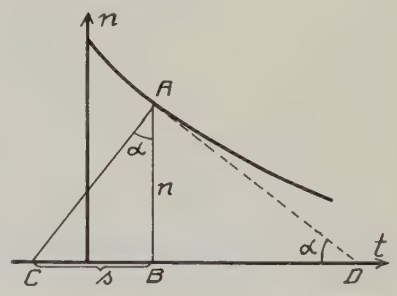


Fig. 30.

Varvtalskurva vid utlöpning.

längd till den längd, den skulle få, om ovan angivna villkor vore uppfyllt. Om man valt 1 cm $= \nu$ varv per sek. och 1 cm $= \tau$ sek., blir reduktionsfaktorn $\left(\frac{\nu}{\tau}\right)^2$, ty dimensionen för $n\frac{dn}{dt}$ är $\frac{n^2}{t}$ och för subnormalen är den t, varför förhållandet mellan dimensionerna blir $\left(\frac{n}{t}\right)^2$. Vi erhålla alltså

$$P_{fr} = 9{,}81 \cdot 4\pi^2 \left(\frac{\nu}{\tau}\right)^2 Ks = Cs \text{ watt.}$$

För en absolut bestämning av friktionsförlusterna måste man känna ankarets tröghetsmoment. På grund av anka-

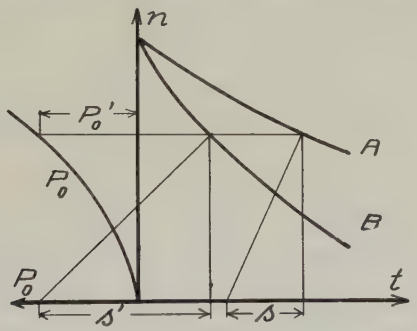


Fig. 31.

Utlöpningskurvor med (B) och utan (A) magnetisering. Tomgångsförlusterna inklusive magnetiseringsförlusterna vid normal magnetiseringsström (P_o).

rets komplicerade form kan emellertid detta ej beräknas, varför man kan förfara på följande sätt. En utlöpningskurva upptages med normal magnetiseringsström, varigenom ej blott friktionsförlusterna utan även järnförlusterna bromsa ankaret. I fig. 31 har denna kurva (B) inritats jämte utlöpningskurvan (A) med endast friktionsbromsning. Med någon av metoderna i 12 (sid. 27) bestämmas dessutom tomgångsförlusterna P_o här inklusive magnetiseringsförlusterna för olika varvtal men med normal magnetiseringsström; P_o som funktion av n har även inritats i

fig. 31. Vid ifrågavarande varvtal antages tomgångsförlusterna vara P_o'. Med endast friktionsbromsning erhålles $P_o = Cs$. Vid bromsning med tomgångsförlusterna erhålles $P_o' = Cs'$, varav $P_o = \frac{P_o'}{s'} \cdot s$, enligt vilken formel friktionsförlusterna kunna beräknas. Som synes skänker metoden en möjlighet att bestämma ankarets tröghetsmoment, vilket erhålles ur relationen

$$9{,}81 \cdot 4\pi^2 \left(\frac{\nu}{\tau}\right)^2 K = \frac{P_o'}{s'}.$$

D. Likströmsmotorernas vridande moment och varvtal.

En motors driftsegenskaper karaktäriseras väsentligen av dess effekt P, varvtal n och vridande moment M. Man har

$$P = \frac{\pi}{30} Mn \text{ kgm per sek.} =$$

$$= 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{30} Mn \text{ watt} = \frac{\pi}{30 \cdot 75} Mn \text{ hkr.}$$

Här betyder n varvtalet per minut; M är angivet i kgf $\times$ m. Effekten har behandlats i samband med verkningsgrad och förluster. Vi skola nu något studera vridande momentet och varvtalet.

15. *Vridande momentet.*

På varje strömgenomfluten ledare i ankarets periferi verkar en mekanisk kraft, som är proportionell mot strömstyrkan och mot den magnetiska induktionen, där ledaren befinner sig. Härav följer, att det totala vridande momentet är proportionellt mot det magnetiska flödet Φ och mot ankarströmstyrkan I_a, d. v. s. $M = cI_a\Phi$, där c är en proportionalitetsfaktor.

För *seriemotorn* är I_a lika med den motorn tillförda strömstyrkan I och Φ proportionellt mot den inducerade emk., som approximativt kan sättas lika med polspänningen

E_p. Man erhåller alltså approximativt $M = CIE_p$. I fig. 32 har E_p uppritats som funktion av I. Denna kurva avviker endast obetydligt från tomgångskaraktäristikan, ty I är här magnetiseringsström och E_p approx. lika med E_i. Momentet är proportionellt mot E_pI, d. v. s. mot ytan av de rektanglar, som uppritas på i figuren angivet sätt. För små I-värden, där E_p är en rät linje, ansluter sig kurvan M till en parabel, men för större I-värden ligger M under parabeln.

För *shuntmotorn* gäller även $M = C_1 I_a \Phi$. Då $I_a = I - I_m$ och $\Phi = C_2 E_i = C_2 [E_p - R_a(I - I_m)]$, fås $\frac{M}{C} = E_p(I - I_m) - R_a(I - I_m)^2$. Om t. ex. vid full belastning $E_p = 400$ V, $I = 25$ A, $I_m = 1$ A och $R_m = 0{,}2$ ohm, blir den lineära

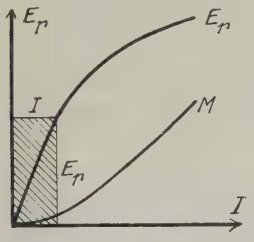


Fig. 32

Kurva for seriemotorns vridande moment (M).

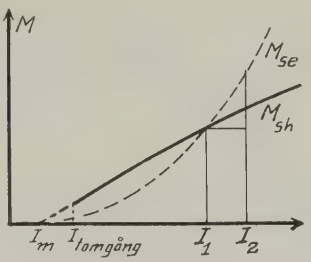


Fig. 33.

Shuntmotorns momentkurva (M_{sh}) jämförd med seriemotorns (M_{se}).

termen $E_p(I - I_m) = 9600$ och parabeltermen $R_a(I - I_m)^2 = 115{,}2$, alltså endast 1,2 % av den lineära termen. Momentkurvan är alltså i det närmaste en rät linje, som är angiven i fig. 33. (M_{sh}). Till jämförelse har inprickats momentkurvan M_{se} för en seriemotor med samma effekt och varvtal och alltså samma strömförbrukning I_1 vid full belastning. Av figuren framgår, att vid en viss överbelastning med strömstyrkan I_2, momenttillskottet blir väsentligt större hos serie- än hos shuntmotorn. Denna egen-

skap är av stor betydelse vid spårvägs- och järnvägsdrift, där seriemotorer användas.

Det bör observeras, att i ovanstående angivna moment M ingår det moment, som erfordras för övervinnande av friktionen. Det genom utbromsning uppmätta vridande momentet P_2, som skulle kunna kallas det avgivna momentet, är alltså något mindre. Med M_1 beteckna vi det tillförda momentet d. v. s. det vridande moment, som skulle erhållas genom utbromsning, om motorn saknade förluster. Då $P_1 = cM_1n$, $P_2 = cM_2n$ och $P_2 = \eta P_1$, fås $M_2 = \eta M_1$. M_1 bestämmes av relationen 9.81 $\frac{\pi}{30} M_1 n = E_p I$ och M_2 genom utbromsning. I fig. 34 äro för en shuntmotor M_1, M, M_2 och η uppritade som funktioner av I. Som ovan påvisats, är M en svagt böjd parabelgren, som utgår från punkten I_m på I-axeln.

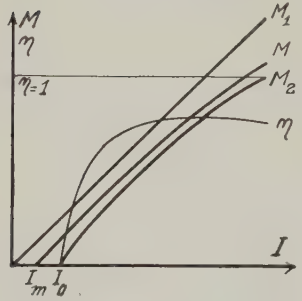


Fig. 34.

Shuntmotorns verkningsgrad (η) och momentkurvor.

16. *Likströmsmotorernas varvtal.* Enligt Faradays induktionslag är $E_i = c_1 \Phi n$ eller $n = c \frac{E_i}{\Phi}$.

För *seriemotorn* kunna vi utan större approximation ersätta E_i med E_p. För att få fram huvudkaraktären av varvtalets beroende av belastningen kan man enligt tomgångskaraktäristikan anse magnetflödet proportionellt mot magnetiseringsstömmen. Detta senare antagande innebär ingen nämnvärd approximation vid svagare magnetisering, där T. K. är en nästan rät linje genom origo, men vid starkare magnetisering blir däremot approximationen avsevärt större. Med dessa approximationer erhålles $n = c_2 \frac{E_p}{I_m}$. Men E_p är konstant och $I_m = I$, varav $n = \frac{C}{I}$. Denna formel anger, att kurvan i fig. 35 nära ansluter sig

till en hyperbel. För små I-värden ansluter sig hastighetskurvan nära till hyperbeln, men för starkare belastning ligger hastighetskurvan på grund av järnets mättning över hyperbeln. Seriemotorns varvtal är alltså mycket starkt beroende av belastningen. Om belastningen upphör, *rusar* motorn och dess hastighet i tomgång n_o bestämmes av friktionsförlusterna, som växa ganska starkt med ökad hastighet. Seriemotorn får dock ej avlastas, ty n_o är dock så stort, att den största risk föreligger att de mekaniska påfrestningarna på grund av centrifugalkraften bli för stora för ankaret. Den stora variationen i varvtal och vridande moment äro emellertid just de driftsegenskaper, som spårvägs- och järnvägsmotorer måste äga.

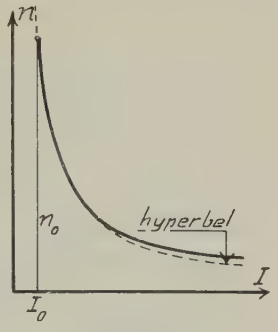


Fig. 35.

Seriemotorns hastighetskurva.

Även vid *shuntmotorn* utgå vi från $n = c\frac{E_i}{\Phi}$. Här äro såväl E_i som Φ i det närmaste konstanta. Om vi här önska få fram den ringa variationen i varvtalet, kunna vi ej som vid seriemotorn, där magnetflödets variation är mycket stor, ersätta E_i med E_p. Vi införa $E_i = E_p - R_a I_a$ och på grund av ankarreaktionens försvagning av flödet $\Phi = \Phi_o - \Delta\Phi$, där Φ_o är magnetiska flödet i tomgång. Vi erhålla alltså

$$n = c\frac{E_p}{\Phi_o} \cdot \frac{1 - \frac{R_a I_a}{E_p}}{1 - \frac{\Delta\Phi}{\Phi_o}} = C\frac{1 - \frac{R_a I_a}{E_p}}{1 - \frac{\Delta\Phi}{\Phi_o}}.$$

Då $\frac{R_a I_a}{E_p}$ och $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_o}$ äro små tal jämförda med 1, inses — som redan nämnts — att varvtalet är tämligen oberoende av belastningen. Allteftersom $\frac{R_a I_a}{E_p} \gtrless \frac{\Delta\Phi}{\Phi_o}$ kommer motorns varv-

tal vid ökad belastning att minskas, förbli konstant eller ökas. Endast det första alternativet förekommer i praktisk drift. På grund av sitt nästan konstanta varvtal har shuntmotorn fått en mycket vidsträckt användning inom verkstadsindustri och annorstädes, där ett nästan konstant varvtal erfordras.

Compoundmotorns driftsegenskaper äro ett mellanting mellan serie- och shuntmotorns. Den förenar så att säga båda typernas goda egenskaper. På grund av shuntmagnetiseringen, rusar den ej i tomgång, och på grund av seriemagnetiseringen får den stort vridande moment vid större belastning, egenskaper av stort värde för t. ex. en borrmaskin.

17. *Shuntmotorns hastighetsreglering och startning.*

Då $n = c\frac{E_i}{\Phi}$, kan varvtalet regleras dels genom ändring av E_i och dels genom ändring av Φ.

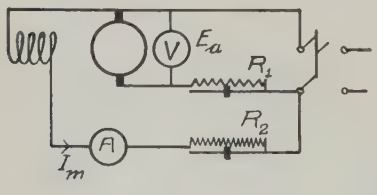


Fig. 36.

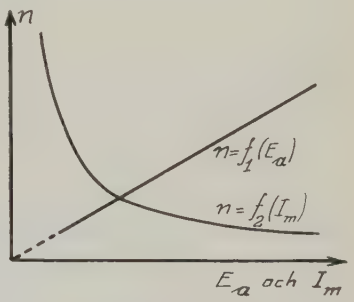


Fig. 37.

Hastighetskurvor för en shuntmotor (fig. 37) och anordning för deras bestämning (fig. 36).

Hastighetsregleringen studeras genom anordning i enlighet med det i fig. 36 angivna kopplingsschemat, varvid motorn drives i tomgång.

Vi hålla alltså först Φ konstant och studera, hur varvtalet beror av ankarspänningen E_a. Med R_2 inregleras därför I_m till ett visst värde och hålles konstant, varigenom även

Φ blir konstant. Med hjälp av R_1 varieras E_a. Då alltså Φ är konstant, och vi approximativt kunna ersätta E_i med E_a, kunna vi enligt ovan angivna grundformel för varvtalet skriva $n = c_1 E_a$, d. v. s. n som funktion av E_a representeras av en rät linje genom origo (se fig. 37).

Då däremot E_a hålles konstant och I_m varieras, erhålles approx. $n = \frac{c_2}{I_m}$, d. v. s. n som en funktion av I_m representeras av en hyperbelliknande kurva, som även angivits i fig. 37. En minskning av magnetiseringsströmmen medför alltså en ökning av varvtalet.

Hastighetsreglering genom variation av ankarspänningen är mycket oekonomisk på grund av den stora energiförlusten i regleringsmotståndet R_1.

Hastighetsreglering genom variation av magnetiseringsströmmen sker däremot praktiskt taget utan energiförlust, ty denna ström är ju avsevärt svagare än förbrukningsströmmen.

Om motorn skall startas med viss belastning, måste det vridande momentet vara tillräckligt stort. Därför är det nödvändigt att startning sker med full magnetiseringsström. Ankarströmmen måste däremot begränsas med ett förkopplingsmotstånd, som succesivt urkopplas allteftersom den motelektromotoriska kraften tillväxer med varvtalets ökning.

För motorns igångsättning användes för ändamålet konstruerat startmotstånd, varvid ovan angivna betingelser uppfyllas. Om hastigheten behöver regleras, användes ett kombinerat pådrags- och regleringsmotstånd. Ett dylikt är angivet i fig. 38. Vid startning tillses, att veven intar läget OA, varefter strömbrytaren K tillslås. Strömmen är alltjämt bruten, men då veven intagit läget OB, är magnetlindningen direkt ansluten till nätet, under det att ankarströmmen passerar förkopplingsmotståndet R_1. Veven förskjutes med jämn hastighet till läget OC, dit den bör nå samtidigt, som det normala varvtalet uppnås. Nu är nätspänningen direkt ansluten till både ankar- och magnet-

lindningen. Om sedan veven vrides till läget OD, stiger varvtalet, enär magnetiseringsströmmen minskas genom succesiv inkoppling av regleringsmotståndet R_2. Veven inställes så, att önskat varvtal erhålles. Om hastigheten skall regleras *under* den normala, då veven befinner sig i läget OC, sänkes ankarspänningen genom succesiv inkoppling av en viss del av motståndet R_1. Tråden i detta motstånd måste då vara så dimensionerad, att den tål den kontinuerliga belastningen.

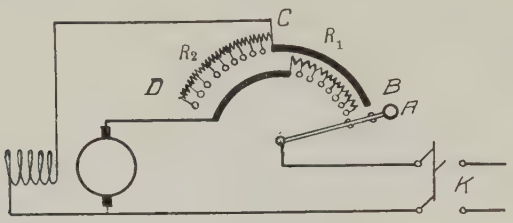


Fig. 38.

Pådrags- och regleringsmotstånd.

Då motorn skall stoppas sker detta genom frånslagning av nätet med strömbrytaren K varefter veven återföres till utgångsläget OA. Om strömmen brytes med veven i stället för med strömbrytaren, uppstår lätt på grund av maskinens självinduktion en ljusbåge som skadar motståndet.

Enkel konstruktion av längden på en hyperbels konjugataxel.[1]

Först beräknas i hyperbelns ekvation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ det x-värde, som motsvarar y-värdet b. Man finner omedelbart $x = \sqrt{2} =$ hypotenusan i en likbent, rätvinklig triangel, som lätt konstrueras direkt i den av endast själva kurvan och dess symmetriaxlar bestående figuren. Sträckan $a\sqrt{2}$ avsättes sedan som abskissa utefter x-axeln och motsvarande hyperbelordinata drages. Denna ordinata blir uppenbarligen $= b$, varigenom uppgiften är löst.

Gust. Forsström.

Not angående ekvaktionen $x^4 + ay^4 = z^2$.

Om ekvationen

$$x^4 + ay^4 = z^2 \tag{1}$$

är lösbar (heltalslösningar), så är också ekvationen

$$\xi^4 - 4a\eta^4 = \zeta^2 \tag{2}$$

lösbar. Ty av (1) erhålles

$$z^4 = (x^4 + ay^4)^2 = (x^4 - ay^4)^2 + 4ax^4y^4,$$

som genom substitutionen

$$\xi = z, \quad \eta = xy, \quad \zeta = x^4 - ay^4 \tag{a}$$

övergår till (2). Har man en lösning till (1), ger således (a) en lösning till (2).

Om a innehåller faktorn 4, alltså om $a = 4\alpha$, så är $-4a = = -16\alpha = -\alpha \cdot 2^4$. Sistnämnda faktor 2 kan tagas som faktor i η. Tillämpar man därför angivet förfarande på (2), får man

$$u = x^4 - ay^4, \qquad v = 2xyz, \qquad w = z^4 + 4ax^4y^4 \tag{b}$$

och

$$u^4 + av^4 = w^2,$$

vilket är den ursprungliga ekvationen. Av en given lösning till (1) erhålles sålunda genom (b) en ny lösning.

[1] Konstruktionen angiven för flera år sedan av en bland mina dåvarande elever vid Lunds Katedralskola. Som jag varken förr eller senare sett metoden upptagen i facklitteraturen, torde den genom sin stora enkelhet förtjäna att här meddelas.

Det kan visas, att koefficienten a i (1) ej kan vara 1, 2, 4 och således enligt ovanstående ej heller -4, -8, -1 (-16).

Exempel: $x^4 + 8y^4 = z^2$ har tydligen rotsystemet (1, 1, 3). Enligt (b) har ekvationen även rötterna (7, 6, 113) o. s. v. Enligt (a) får man rötterna (3, 2, 7) till ekvationen $x^4 - 2y^4 = z^2$.

Understundom kan från de erhållna rötterna en gemensam faktor bortdivideras. Så t. ex. giva rötterna (2, 1, 6) till $x^4 + 20y^4 = z^2$ rötterna (6, 4, 4) till $x^4 - 5y^4 = z^2$, vilka kunna reduceras till (3, 2, 1).

Carl Bodlund.

Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel.

I sin uppsats »Den jämnbreda linjalen som konstruktionshjälpmedel» i tidskriftens marsnummer förra året nämner författaren, E. Lunell, på sid. 7 sex »elementarproblem» och säger samtidigt, att de flesta av dem blivit lösta i hans uppsats. Då det enda, som han lämnat olöst, det att förflytta en vinkel (5), inte erbjuder större svårigheter än de övriga, tager jag mig friheten insända följande lösning (fig. 1).

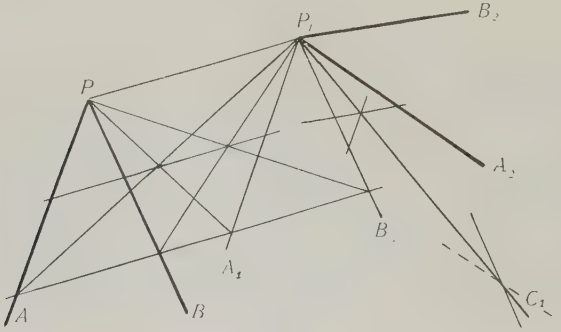


Fig. 1.

Vinkeln APB skall förflyttas så, att spetsen P kommer att ligga i P_1 och ena benet PB utefter P_1B_2. Genom P_1 dragas två linjer, parallella med resp. vinkelben (konstruktionen fordrar 9 linjer). Bissektrisen P_1C_1 till vinkeln $A_1P_1B_2$ drages (3 linjer) och vinkeln $C_1P_1A_2$ konstrueras $= C_1P_1B_1$. Då är vinkeln $A_2P_1B_2 = APB$.

Antalet erforderliga konstruktionslinjer är alltså 13. Som tvåkantad användes linjalen 6 gånger.

Genom att bygga på denna konstruktion får man en enklare metod (15 linjer) än Lunells (19 linjer) att lösa det sjätte elementarproblemet (att förflytta en sträcka). Om linjen AB (fig. 2) skall

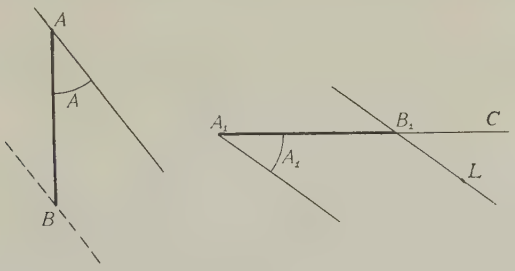


Fig. 2.

avsättas från A_1 utefter A_1C, kan man genom att använda linjalen »på andra sättet» erhålla vinkeln A, som flyttas till A_1, varefter man erhåller linjen L och punkten B_1.

Torsten Simmons.

Insändaren har tydligen ej observerat, att även senare delen av »elementarproblemet» 4., att mångfaldiga en vinkel, har lämnats olöst av mig, då jag för bevisföringen behövde det lika litet som problemet 5. Men i själva verket har lösningen därav råkat komma med i hans konstruktion. Vinkeln $B_1P_1C_1$ fördubblas ju och kan då genom upprepning av förfaringssättet godtyckligt mångfaldigas.

I konstruktionen, som ju är en parallellförflyttning, följd av en vridning, är den senare av särskilt intresse, då den är utförd som en spegling kring linjen P_1C_1. Denna spegling kan även ske genom att använda linjalen enbart »på 1:a sättet» men kräver då 14 linjer i stället för, som i Simmons' enkla konstruktion, 1.

Det är en fyndig idé av T. Simmons att förflytta en sträcka genom att flytta en viss vinkel. En oväntad och roande omvändning av Euklides I: 23! — Det är dock av väsentlig betydelse för den algebraiska undersökningen av linjalen, att konstruktionen kan utföras med denna använd enbart på 1:a sättet (se sid. 15 i min uppsats).

De, som äro intresserade av dessa konstruktioner, kunna finna ännu ett olöst problem på sid. 18 i min uppsats.

Einar Lunell.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Från årsmötet i januari 1937.[1]

Föreningen avhöll sitt årsmöte den 7—8 jan. i Stockholm i närvaro av något mer än 100 medlemmar. Ordf., rektor B. Söderborg, inledde mötet med några minnesord över lektor M. Lemoine, Uppsala, som avlidit under året. Rektor Söderborg framhöll den stora betydelse lektor Lemoine haft för främjandet av fysikundervisningen i Sverige genom sitt skriftställarskap, genom sitt arbete för ändamålsenligt inredande av fysikinstitutionerna, genom sina många nya apparatkonstruktioner och experiment och sist men icke minst genom den entusiasm, med vilken han gick till sitt arbete och som gjorde att han ryckte många med sig.

Sedan styrelsens årsberättelse och revisionsberättelsen upplästs och godkänts samt skattmästaren, lektor C. Lönnqvist, beviljats full och tacksam ansvarsfrihet, omvaldes ordföranden. Likaledes omvaldes styrelsen (se sid. 4) med undantag av adjunkten E. Wettervik, som undanbett sig återval. Nyvalda blevo fil. lic. Börje Svensson, Lund, och adjunkt E. Sandén, Stockholm. Revisorer och revisorsuppleanter omvaldes.

Inom styrelsen är lektor T. Wetterblad ordf., adjunkt S. Åstrand sekr. och lektor C. Lönnqvist skattm. Arbetsutskottet består av ordf., v. ordf., sekr. samt lektor G. Starck och adjunkt B. Wahlström.

Efter förhandlingarna höll docent G. Stenvinkel föredrag om »Några resultat angående atomers och molekylers byggnad från de senare årens optiska undersökningar». Det mycket intressanta föredraget var för omfattande för att här kunna refereras.

Årsmötet uppdelades härefter på två sektioner. Inom den ena sektionen diskuterades frågan »Är realskolans matematikundervisning för närvarande väl avpassad efter de krav, som efter examen ställas på de examinerade?». Inledare voro lektor Hjalmar Olson, Stockholm och rektor Joh. Hellman, Orsa. Lektor Olson framhöll inledningsvis, att realskolans matematikundervisning har

[1] Tidigare medd. från föreningen: årg. *16*, 1933 sid. 226; årg. *17*, 1934 sid. 46 och 113; årg. *18*, 1935, sid. 42 och 47; årg. *19*, 1936, sid. 36.

en dubbel uppgift: att förbereda till fortsatta studier i matematik t. ex. på realgymnasiet och att ge en viss praktiskt användbar matematisk kunskap. Lektor Olson, som speciellt ägnat sin uppmärksamhet åt den förra uppgiften, måste besvara den förelagda frågan med nej. Erfarenheten av gymnasieundervisningen efter den senaste reformen är ju icke så stor, men den pekar mycket bestämt mot en försämring. Navigationsskolorna, som förut nöjt sig med realexamensbetyg, ha nu övergått till att underkasta inträdesprövande med realexamen ett prov i bokstavsräkning. Den enda tänkbara vägen att komma ut ur de nuvarande förhållandena är att matematiken återfår något av den tid på timplanen ämnet förlorat. I väntan härpå ville lektor Olson rikta de närvarandes uppmärksamhet på ett par saker. Den ena var, att geometrien icke får försummas. Det ligger nämligen nära till hands att göra detta i de realskolor, som icke sända sina elever direkt till något gymnasium; att klara realexamensskrivningen hedersamt blir lätt det dominerande målet. Den andra gällde hemläxorna. Lektor Olson hade med hjälp av de understrukna timmarna på läsordningarna undersökt antalet hemläxor i 174 skolor. Undersökningen tycks ge vid handen, att matematiken i många skolor förfogar över ett väsentligt mindre antal hemläxor än vad ämnet borde göra. Om denna sak uppmärksammas av vederbörande, kan undervisningen i matematik i dessa skolor göra en vinst, som icke är att förakta.

Rektor Hellman granskade realskolans matematikundervisning ur den andra av de båda uppgifternas synpunkt. Omfattningen av kursen är för de praktiska yrkenas behov snarare för stor än för liten, men tiden för inövning av de viktigaste momenten räcker icke. Det praktiska livet kräver framför allt säkerhet i sifferräkningarna, vare sig de göras i huvudet eller på papperet, och på den punkten är det det brister. Om man ej vill äventyra matematikundervisningens andra huvudmål: att förbereda för fortsatta studier, kan en förbättring härutinnan icke åstadkommas på annat sätt än att ge matematiken ett ökat timtal. I detta sammanhang berörde inledaren frågan om differentierade realskolor. Vidare nämnde rektor H., att det praktiska livets målsmän skulle sätta stort värde på en kurs i bokföring. Samtidigt som inledaren underströk betydelsen av en dylik, framhöll han, att denna bokföringskurs dock knappast kan räknas till matematiken.

Den följande diskussionen blev mycket livlig, och den utmynnade i att mötet vädjade till styrelsen: att — samtidigt som styrelsen oavbrutet hade sin uppmärksamhet fäst på varje möjlighet att få större timantal åt matematiken, särskilt i näst högsta real-

skoleklassen — 1. verkställa utredning om antalet matematikläxor i jämförelse med antalet i andra ämnen, 2. framföra yrkandet om införandet på realskolans timplan av en kurs i bokföring, dock ej som moment i matematikkursen, 3. för vederbörande i någon form påpeka, att geometrien ej bör allt för mycket tillbakasättas till förmån för räknandet av examensuppgifter, 4. undersöka behovet och möjligheten av att inlägga tre-timmars provräkningar på skrivschemat i realskolans näst högsta klass.

Föreningens andra sektion diskuterade »I vad mån fyller läroverkens kemikurs de krav, som andra skolämnen, vetenskap och teknik kunna ställa på den?». Inledningsanföranden (referat se sid. 16) höllos av lektor G. Starck och fil. dr. H. Erdtman, Stockholm.

Årsmötets andra dag ägnades åt besök i Västerås, där föreningen var ASEA:s gäst. I detta besök deltogo omkring 80 medlemmar. Omedelbart efter ankomsten till staden samlades deltagarna i Aseas klubblokal, där först ingenjör H. Svensson gav en orientering över Asea och Aseagruppen. Ingenjör S. nämnde därvid några verkligt imponerande siffror. De direkt till Asea hörande verken sysselsätta omkring 12 000 arbetare och av Aseagruppen bero 150 000 människor. Asea har 16 utländska dotterbolag, vid vilka 2 000 personer äro anställda. Härefter gav chefen för Aseas materiallaboratorium, ingenjör Bror Andersson, en översikt över materiallaboratoriets utveckling och arbetsuppgifter. Den intresserade finner en beskrivning av detta laboratorium och de arbeten, som bedrivas där, i Kosmos, årg. 14, 1936, »Några svenska industrilaboratorier I» av fil. dr Sven Fagerberg.

Efter en kort rundtur i staden bjöd Asea på lunch på stadshotellet. Därefter vidtog visningen av verkstäderna och materiallaboratoriet. Deltagarna uppdelades i grupper om 16 st., var och en med sin ciceron. Rundvandringen, som sträckte sig över flera kilometer och varade dryga tre timmar, gav deltagarna en mycket god behållning. Man fick ett överväldigande intryck av rörelsens omfattning, utomordentliga organisation och av den i detalj genomförda rationaliseringen av driften. Mången intressant detalj stannade också i minnet och vore väl värd sitt kapitel, men utrymmet i ett kort referat tillåter ej att närmare ingå härpå.

Vid fyratiden samlades deltagarna i Statens elektrotekniska fackskola. Rektor F. Ericsson redogjorde i korthet för skolans organisation liksom även för Västerås stads lärlings- och yrkesskolor, vilka voro inrymda i samma byggnad. Fackskolans välförsedda maskinlaboratorium visades av rektor Ericsson och lektor E. Zachrisson, och några experiment och mätningar utfördes.

Sigurd Åstrand.

Styrelseberättelse för år 1936.

Efter årsmötet den 7—8 januari 1936 bestod styrelsen av rektor B. Söderborg, Stockholm, ordf., lektor T. Wetterblad, Stockholm, v. ordf., adjunkt S. Åstrand, Stockholm, sekr., lektor C. Lönnqvist, Södertälje, skattmästare, lektor E. G. Bolinder, Uppsala, lektor K. Dahr, Örebro, professor B. Holmberg, Stockholm, lektor M. Lemoine, Uppsala (avgick genom döden under våren), professor J. Malmqvist, Stockholm, lektor G. Mikaelsson, Norrköping, lektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, lektor Eva Ramstedt, Stockholm, professor M. Riesz, Lund, överste R. Sjöberg, Stockholm, lektor G. Starck, Stockholm, lektor A. Wahlgren, Stockholm, adjunkt B. Wahlström, Stockholm, och adjunkt E. Wettervik, Stockholm. Arbetsutskottet har bestått av ordf., v. ordf., sekr., lektor Starck och adjunkterna Wahlström och Wettervik.

Styrelsen har under året hållit fyra och arbetsutskottet två protokollförda sammanträden.

På initiativ av Lundaföreningen avläts den 3 april en skrivelse till S. Ö. med framställning om krav på laborationer i studentexamen för komplettanter och privatister i de naturvetenskapliga ämnena. Den 23 april kom svar från S. Ö., vartill var fogat ett samma dag daterat cirkulär till rektorsämbetena vid de högre allmänna läroverken, i vilket cirkulär bestämmelser om de omskrivna laborationerna finnas.

Under vårterminen behandlades mera ingående frågan om den akademiska undervisningen och lärareutbildningen. Den 6 maj fick styrelsen mottaga ett antal frågor från 1936 års lärareutbildningssakkunniga angående just dessa förhållanden. Svaret på dessa frågor var färdigt i början av juni och överlämnades då till de sakkunniga. Skrivelsen har i allt väsentligt varit införd i Tidning för Sveriges läroverk. Vid utarbetandet av skrivelsen har arbetsutskottet samarbetat med Lundaföreningens styrelse. Lundaföreningen lämnade i en bilaga till nyssnämnda skrivelse en del kompletterande upplysningar angående den akademiska undervisningen i Lund.

I början av november utsändes till de förlag, som utge läroböcker i räkning, en anhållan att förlagen skulle ordna, så att där facit till läroboken var lös, den även kunde inköpas separat.

Den 9 maj demonstrerade professor G. Aminoff på Riksmuseums mineralogiska avdelning apparater för studiet av elektroninterferenser i kristaller.

Den 18 november höll Tekn. dr H. Sterky i Telefonaktiebolaget

L. M. Ericsson föredrag om »Hur utväxlas ett telefonsamtal mellan Stockholm och San Fransisko?» Samtidigt fingo föreningens medlemmar tillfälle att bese Telefonaktiebolaget L. M. Ericssons apparatutställning.

Föreningens rådgivningsbyrå, till vilken man från läroverk och likställda skolor kan vända sig för att mot ersättnig få råd vid inredning av fysiska och kemiska institutioner, består av: för kemi lektor G. Starck, för fysik lektorerna C. Bergholm och A. Nordhult.

Medlemsantalet var den 31 december 1936 677, varav 200 tillhörde Lundaföreningen.

Stockholm den 7 januari 1937.

Benkt Söderborg / Sigurd Åstrand.

I vad mån fyller läroverkens kemikurs de krav, som andra skolämnen, vetenskap och teknik kunna ställa på den?

Sammandrag av inledningsanföranden vid årsmötet.

Det skolämne, som framför andra har behov av kemiska förkunskaper, är biologien, nämligen för djur- och växtfysiologien och de biokemiska företeelserna över huvud, och skolans kemikurs bör på lämpliga stadier meddela dessa förkunskaper. Ur vetenskaplig och teknisk synpunkt bör skolkursen i kemi vara korrekt och i någon mån avspegla den nuvarande ståndpunkten. Kursen särskilt i det differentierade realgymnasiet bör vara en god grundval för fortsatta studier vid hög- och fackskolorna.

Det första, som faller i ögonen beträffande den nu stadgade kemikursen, är den stora övervikten för den oorganiska kemien och den blygsamma plats, som tillmätts den organiska kemien. Proportionen mellan de för dessa ämnen anslagna tiderna kan anges till ungefär 6 ½ : 1 ½. Denna övervikt för den oorganiska kemien har två orsaker: den första, att skolkursen är en kurs i kemiens elementer, och att den oorganiska kemien såsom den enklaste av de kemiska disciplinerna bäst lämpar sig för ett grundläggande studium. För det andra är skolkursen, så som den nu gestaltar sig, i mycket en kvarleva från den tid, då det ännu fanns något att göra och utfördes arbeten i deskriptiv oorganisk kemi vid universiteten, och då denna kurs vid sidan av sin allmänt införande karaktär också var betydelsefull som

förberedelse till fortsatt forskning eller oorganiskt tekniskt arbete. Nu är ställningen en annan. Den rent oorganiska kemien är nu så genomplöjd, att det vetenskapliga arbete, som därinom utföres, kvantativt sett är minimalt, kvalitativt icke alltför betydelsefullt. Vad som karakteriserar det nutida kemiska vetenskapliga och tekniska arbetet är å ena sidan det utomordentligt starka intresset för de subatomära, atomära och fysikaliskt-kemiska områdena och för organisk och biokemi, å den andra det obefintliga intresset för skolkursens huvudsakliga innehåll, deskriptiv oorganisk kemi. För att göra en modern oorganiskt-kemisk, vetenskaplig eller teknisk undersökning är det numera viktigare att vara grundligt insatt i atomteori och fysikalisk kemi än att vara i besittning av detaljkunskaper i oorganisk kemi. En minskning av det i skolan meddelade, rent oorganiska kunskapsstoffet, en ökning av atomteori, fysikalisk kemi och organisk kemi är icke blott rimlig och önskvärd, utan även nödvändig, om kemikursen skall anses fylla allmänbildningens och de högre utbildningsanstalternas krav.

För att kunna genomföra motsvarande ändringar i kursplanen måste man göra kraftiga strykningar. Dels kan man avföra hela grundämnen, dels mindre betydelsefulla föreningar ur kursen. Följande grundämnen skulle kunna utgå: av metalloider fluor och bor, av metaller strontium, kobolt, nickel, platinametallerna (utom platina), vismut, möjligen arsenik och antimon. Även bland föreningarna av de återstående grundämnena måste man gå obarmhärtigt fram. I vissa fall kan man helt avstå från att ingå på föreningarna, t. ex. i fråga om guld, platina, antimon, tenn. I andra fall kan man stryka den närmare behandlingen av grundämnet och endast ingå på föreningarna, t. ex. i fråga om alkalimetallerna o. a. I vissa fall kunna föreningar anses tillräckligt bekantgjorda genom att de uppträda i analysen.

I den obligatoriska kursen bör också ingå en väl inlärd och smält sammanfattning av de enklaste i den oorganiska kemien använda metoderna, nämligen för framställning av lösliga och olösliga salter, för oxidation och reduktion. Den, som avslutar sitt kemistudium i RII (av det 4-åriga gymnasiet) har fått ett pensum i organisk kemi, tillräckligt för förståelsen av de enklaste biokemiska företeelserna och av några viktiga tekniska processer och deras produkter. Vidare kännedom om de viktigaste metalloidernas kemi och några av de metaller, vilkas huvudsakliga betydelse ligger hos deras föreningar, därjämte, efter en lämplig omgruppering av stoffet, några av de viktigare bruksmetallerna, såsom aluminium, järn, koppar.

Under den tillvalda kursen avslutas den oorganiska och fullständigas den organiska kemien, så vitt möjligt på atomistisk och fysikaliskt-kemisk grundval. *G. Starck.*

Beträffande den högre undervisningen i kemi vid läroverken vill jag huvudsakligen framhålla två synpunkter, nämligen de önskemål, som universitetet och högskolor kunna framställa, och de önskemål, som synas mig böra ställas på en intimare anknytning av vissa delar av kemiundervisningen till den under senare år i hög grad moderniserade undervisningen i biologi, särskilt fysiologi.

Högskolorna äro intresserade av att de nyinträdande eleverna äro i besittning av en solid grund att bygga vidare på, vilket icke är liktydigt med en största möjliga fond av detaljkunskaper, utan fastmer en klar, inom skolkemins ram möjlig uppfattning av de allmänna fysikaliskt-kemiska sammanhang, förutan vilka kemin ej skulle räknas till de »exakta vetenskaperna».

Önskvärt vore alltså, att den fysikaliska kemin i skolorna ägnades mer intresse och så långt detta av pedagogiska skäl är möjligt behandlades i ett sammanhang, t. ex. grupperad kring kapitlen: det gasformiga, det flytande och det fasta tillståndet.

Det gasformiga tillståndet behandlas i vissa läroböcker i stort sett tillräckligt utförligt. Vad det flytande tillståndet beträffar, borde hydrolysen behandlas kvantitativt i stället för som nu i allmänna ordalag. Detsamma gäller de fundamentala begreppen syrors och basers styrka, amfotera elektrolyter, buffertverkan. Det är icke så mycket ett nyinförande av material, som är önskvärt, som en övergång från ett vagt, kvalitativt betraktelsesätt till ett mera klart och exakt. Det är svårt att förstå, varför skolkemin bör förbliva i det närmaste rent deskriptiv, helst som den matematiska apparaten är av den allra enklaste beskaffenhet. I sammanhang härmed är givetvis — liksom i fysikundervisningen — en övning i fysikaliskt-kemiska, ej blott stökiometriska problem önskvärd. Det är en länge gjord erfarenhet vid inträdesprövningar till högskolorna, att just häri åskilligt brister.

Det fasta tillståndets adekvata behandling på skolstadiet stöder på stora svårigheter på grund av elevernas ringa insikter i stereometri. Demonstrationer av modeller av olika kristallstrukturer och diskussion av valensproblem i samband därmed torde vara det mesta, som kan åstadkommas under nu rådande förhållanden.

Genom att lägga tonvikt på den kvantitativa behandlingen av de kemiska företeelserna kunde den elementära kemiundervis-

ningen vinna betydligt i klarhet och fasthet och den nu bestående olyckliga skillnaden mellan »skolkemi» och »högskolekemi» väsentligt reduceras. Härigenom vore ur högskolornas synpunkt åtskilligt vunnet.

Den organiska kemins idéinnehåll, på skolstadiet ganska fattigt, kunde göras rikare genom en kort behandling av stereokemins element (den fria vridbarheten vid enkelbindning, den stela dubbelbindningen och möjligen även den asymmetriska kolatomen).

De enkla alifatiska ämnena böra behandlas med särskild hänsyn till de biokemiskt viktiga föreningarna och deras omsättningar. I anslutning härtill vore det önskvärt att införa ett kort kapitel om enzymernas allmänna kemi — deras amfotera natur, pH-beroende och specificitet.

Som *illustrationer* till sockerarternas kemi böra införas strukturformler för monosackariderna och en eller ett par disackarider jämte en bild av en stärkelsekedja. Detta vore utan tvivel av stor betydelse för biologiundervisningen, där nu olikheten mellan disackariderna gentemot Fehlings lösning och olikheten mellan de enkla sockerarterna måste accepteras utan vidare förklaring.

Vad ovan sagts om sockerarternas kemi gäller i ännu högre grad om äggviteämnenas. Upptagandet av några få aminosyror och en bild av en peptidkedja skulle råda bot för detta uppenbara missförhållande.

På grund av dess vikt för förståendet av sambandet mellan färg och struktur, »oxidationens» natur och de kinoida ämnenas betydelse som acceptorer i ämnesomsättningens tjänst bör möjligen i anslutning till hydrokinon dess oxidation till kinon införas. Den lätthet, varmed denna reversibla reaktion kan genomföras, gör den dessutom lämplig som laborations- resp. lektionsförsök.

En stor del av de biokemiska försök, som nu utföras under biologilaborationeran, böra överföras till laborationerna i organisk kemi (vilket faktiskt redan tillämpas vid flera läroverk). Härigenom skulle någon, om ock otillräcklig tid vinnas för det beträngda biologiämnets mest trängande krav: ökat utrymme för växtfysiologi och ärftlighetslära.

Även en så måttlig utvidgning av den fysikaliska och den organiska kemins innehåll är emellertid otänkbar utan motsvarande nedskärning av andra kursmoment. Ehuru allt fortfarande grund för skolkemin, kan den oorganiska kemikursen, särskilt dess till stora delar föråldrade, överflödiga, rent deskriptiva element, vidkännas en inskränkning utan att därigenom mista något av sin systematiska klarhet. *H. Erdtman.*

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Styrelseberättelse för verksamhetsåret 1936.

Under året har som ordf. fungerat rektor P. G. Persson, Malmö, som v. ordf. till den 14 nov. prof. G. Hössjer, Göteborg, och fr. o. m. nämnda datum rektorerna E. Hernqvist, Halmstad och K. Parck, Eslöv, som sekr. och kassör fil. lic. Börje Svensson, som v. sekr. fil. d:r H. Nordström. Övriga styrelseledamöter ha varit hamndirektör G. Edlund, lektor A. Jönsson, prof. J. Koch, rektor H. Körner, lektor A. Leide, prof. K. Lundmark, rektor F. Montén, prof. M. Riesz, rektor S. Sjöberg, prof. L. Smith och lektor Bernhard Svensson. Arbetsutskottet har utgjorts av ordf., sekr., professorerna J. Koch, L. Smith och G. Hössjer; i den senares ställe inträdde den 14 nov. rektorerna Hernqvist och Parck.

Under året har hållits två sammanträden: den 14 mars i Malmö på Högre allm. lärov. för flickor och den 14 nov. i Lund på universitetets Fysiska institution. Vid vårsammanträdet diskuterades dels »Fysikundervisningen i gymnasiets första ring och realskolans avslutningsklass enligt 1933 års läroverksstadga» med rektor E. Hernqvist, Halmstad, som inledare och dels »Lärarutbildningen i kemi» med lektor G. Starck, Stockholm, och docent E. Schjånberg, Lund, som inledare. Samtidigt förevisades några filmer med fysikaliskt och kemiskt innehåll. Vid höstsammanträdet höll läroverksadj. J. E. Hemmingsson, Eslöv, föredrag över »Omfattningen av realskolans fysikkurs» och demonstrerade lektor A. Leide »Bestämning av g» och »Vågrörelsekurvor» och assistent Börje Svensson tillsammans med amanuenserna Tage Larsén och Nils Frössling de senaste årens införda försök på Fysiska Institutionens övningslaboratorium: 1. Försök med elektrisk transformator, 2. Elektrisk likströmsgenerator, shuntkopplad, 3. Elektrisk likströmsmotor, shunt- och compoundkopplad, 4. Växelströmssynkrongenerator och 5. Bestämning av *e/m*. (Referat av höstsammanträdet se Tidning för Sveriges läroverk nr 25, 1936).

Antalet deltagare i sammanträdena ha varit 90.

Under året har styrelsen haft två sammanträden, varvid huvudsakligen planläggning av föreningens sammanträden skett. Vid styrelsesammanträdet den 6 oktober framkom förslag om att föreningen skulle försöka få till stånd s. k. fortbildningskurser, och arbetsutskottet fick i uppdrag att närmare utreda frågan och företaga de åtgärder, som det fann lämpligt.

Under senare delen av vårterminen 1936 har arbetsutskottet tillsammans med styrelsen för föreningen i Stockholm avgivit yttrande till Lärarutbildningssakkunniga som svar på ett av dessa till föreningarna ställt frågocirkulär. Arbetsutskottet hade vid utarbetande av nämnda yttrande med sig adjungerat lektor G. Arvidsson, läroverksadjunkt T. Edqvist, lektor A. Leide och lektor Bernhard Svensson. Till stora delar var yttrandet gemensamt för lunda- och stockholmsföreningen; till en del utgjorde lundaföreningens yttrande ett svar på de av lärarutbildningssakkunniga framställda frågorna, sedda under de förhållanden, som äro rådande vid lärarutbildningen vid Lunds universitet. Som bilaga följde en mera detaljerad redogörelse för den del av den akademiska undervisningen i Lund i fysik och kemi, som direkt tar sikte på vad den utexaminerade läraren behöver i sitt dagliga arbete. Som avslutning framställdes önskemål om att fortbildningskurser snarast möjligt borde komma tillstånd.

Av lundaföreningens medlemmar tillhöra tre styrelsen för stockholmsföreningen, rektor P. G. Persson, prof. M. Riesz och fil. lic. Börje Svensson.

Medlemsantalet var vid årets början 160 och vid årets slut 201.

Lund den 28 jan. 1937.

P. G. Persson / Börje Svensson.

Sommarkurs i kemi.

Under förutsättning av tillräckligt stor anslutning kommer lektor G. Starck att vid *Högre reallläroverket på Norrmalm* i Stockholm den 14—19 juni 1937 leda en kurs i kemi för läroverkslärare enl. följande allmänna program:

Övningar i utförande av lektions- och laborationsförsök, gemensamma demonstrationer av försöken.

Kvällsföreläsningar (c:a 4 dubbeltimmar) i atomkemi, fysikalisk kemi och organisk kemi av universitetslärare, vilkas namn meddelas senare.

Avgift för fullständig kurs (experimentella övningar och föreläsningar) 30 kr., för endast föreläsningarna 5 kr. Antal deltagare i den experimentella kursen minst 20, högst 30; i fråga om antalet åhörare av föreläsningarna ingen begränsning. Anmälningar senast den 1 maj 1937.

Bokanmälningar.

F. Emerson Andrews, *New Numbers. How acceptance of a duodecimal base would simplify arithmetic.* Faber & Faber, London 1936, 162 sid., 6 s.

När Karl XII låg i Lund, hade han som bekant en animerad diskussion samman med Polhem och Swedenborg om olägenheterna av talet 10 som bas för ett talsystem. Kungen förordade i stället talet 64, både kub och kvadrat, och utarbetade egenhändigt ett förslag till nomenklatur för det nya systemet. Swedenborg har senare skrivit om såväl 8-systemets som decimalsystemets olika möjligheter. Andra basisvärden, som försökts eller föreslagits, äro: 2 (Leibniz), 12, 16 och 20. Den största smidigheten torde nog 12-systemet besitta och hade människan normalt haft sex fingrar på varje hand, skulle vi helt säkert aldrig räknat med 10-systemet annat än i enstaka algebraiska övningsuppgifter.

Någon rikhaltig litteratur, som speciellt behandlar 12-systemet i alla dess konsekvenser, finnes egendomligt nog ej, oaktat mången matematiskt intresserad helt säkert någon gång i sin ungdom gjort upp multiplikationstabell och nomenklatur för 12-systemet. Även för den som ej så gjort bör Andrews bok om duodecimalsystemet vara av intresse. Andrews är själv ej matematiker och skriver ej heller för matematiker, och detta är kanske orsaken till att framställningen bäres av en medryckande entusiasm för ämnet.

För att i tryck skilja systemen åt använder förf. vanliga antikvasiffror för decimalsystemet och kursiva siffror för 12-systemet. Dessutom införas de nya symbolerna χ och $\mathcal{E}$ för tio och elva.

Vad nomenklaturen i övrigt beträffar, torde den vara förf:s mest sårbara punkt. Det måste vara ett psykologiskt felgrepp att låta 12-systemets *11, 12, 13, ...* (motsv. 13, 14, 15, ... i 10-systemet) utläsas: »eleven, twelve, thirteen», medan 12-systemets χ, $\mathcal{E}$, *10* (motsv. 10, 11, 12 i 10-systemet) utläsas: »dec, elf, zen». Förf. föreslår även i ett kapitel en serie konsekvent 12-delade längdmått, och detta är ju fullt logiskt. Men att införa icke mindre än 10 olika namn på enheter, när serien blott omspänner 7 digniteter av systemets bas, leder onekligen tanken mot Indien, där

man ju redan tidigt excellerat i utförlig namngivning av stora tal. Förf. är lyckligtvis ingen fanatisk revolutionär, han upptager i ett tillägg till boken några förslag, som framkommit från allmänheten beträffande siffertalens namngivning, och som delvis äro bättre än hans egna.

Om vi bortse från bokstaven, som dödar, och blott se till de matematiska symbolerna och vad de uttrycka, måste vi erkänna, att 12-systemet är överlägset vårt brukliga 10-system. Förf. exemplifierar sitt kära system utförligt vid tillämpandet av de fyra räknesätten, inom mått, mål och vikt, gradindelningar (kompassrosen), tidsindelningen, ränteräkning (månadsräntor bli särskilt lätta att kalkylera), vid myntenheter och även vid logaritmisk räkning. En kortfattad 6-siffrig logaritmtabell i tolvsystem finnes återgiven, en utförligare lär f. n. vara under uträkning. Bland de många fördelarna utöver att basen 12 innehåller så många faktorer må nämnas, att man vid räkning med duodecimalbråk i allmänhet når större noggrannhet än med decimalbråk. Sålunda är t. ex. $\pi = 3.1848$ noggrannare än $\pi = 3.1416$.

Att numera på allvar söka slopa 10-systemet och införa 12-system skulle kräva en mycket grundlig revolution i världen. Vinsten skulle ej svara mot uppoffringen, och någon häftig omstörtning agiterar ej heller Andrews för, så att boken kan anses vara ofarlig ur denna synpunkt. Dock torde en eftertänksam läsare åtminstone bringas därhän, att han stillsamt beklagar, att ej människan från början skapats med sex fingrar på varje hand. Nu är det för sent att ändra.

J. Tandberg.

Paul Karlson, *Från atom till universum.* Natur och Kultur 1936. 266 sid. + 8 planscher. Pris häftad kr. 6: 50, inbunden kr. 8: 50.

Författaren till föreliggande bok är trots sitt svenskt klingande namn en tysk fysiker, och boken är översatt från tyska, något som här och där är tydligt märkbart. Det är fråga om en populär bok av känd typ, avsedd att ge en lättfattlig bild dels av de nya atomteorierna och rönen på atom- och kärnfysikens område, dels av relativitetsteorien. I sakligt avseende skiljer den sig ej så mycket från många föregångare; de viktigaste teorierna och experimentella resultaten framställas någorlunda riktigt, ehuru givetvis med den förenkling och ytlighet, som torde vara oundviklig i en populär bok utan matematisk apparat. En del detaljanmärkningar, man kan göra, äro för en bok av denna art ej särskilt graverande. I en verklig läro- eller handbok fordrar man ju felfrihet även i detaljer, men i en populär bok ha detaljfel egent-

ligen rätt liten betydelse; det viktigaste är att boken ger en någotsånär riktig uppfattning av de principiella tankegångarna. Därtill tror jag att föreliggande verk i någon mån kan bidraga.

Det som särskilt utmärker boken är det oförfärade valet av liknelser och analogier ur dagliga livet för att illustrera fysikaliska satser. Ett exempel: interferensfenomenen förklaras med hjälp av två boxare, som bearbeta samma punchingboll antingen i takt eller i otakt med varandra. Boken vimlar av liknande saker och är därigenom ganska nöjsam att läsa. Bra är, att förf. ägnar en god del av utrymmet åt grundläggande begrepp ur den klassiska fysiken, som ju bildar den fasta grundvalen för de nya teorierna.

Illustrationerna äro dels ett antal ganska primitiva teckningar, dels några planscher, som tyvärr äro onumrerade och insatta utan sammanhang med texten. Då det t. ex. på sid. 224 hänvisas till plansch 1, fordras nästan att man i förväg lagt upp ett privat planschregister för att man skall finna, att härmed menas den onumrerade planschen vid sid. 80!

Sven Benner.

Lychnos, *Lärdomshistoriska samfundets årsbok, 1936.* Uppsala och Stockholm, 4:o, 544 sid., kr. 12:—.

En bok på 544 sidor i kvartformat med 21 originaluppsatser, med anmälningar av 153 arbeten, behandlade av 46 olika recensenter, med en tidskriftsrevy omfattande 39 utländska tidskrifter, vidare samfundets krönika 1934—1936, notiser och meddelanden om lärdomshistoriska institutioner och deras verksamhet i 8 olika länder, en bibliografi över svensk lärdomshistorisk litteratur för år 1934, omfattande 315 arbeten inom olika vetenskaper, och slutligen en förteckning över samfundets 2 270 medlemmar.

En sådan årsbok är rent kvantitativt en icke dålig prestation av ett samfund, som startade för ett par år sedan endast. I vad mån berör nu denna publikation de ämnen, som denna tidskrift representerar? Några data: Av de 21 originaluppsatserna behandla 6 à 7 ämnen, som mer eller mindre höra hit. Här är särskilt att anteckna en längre uppsats om Scheeleforskning och Scheelelitteratur av Bengt Hildebrand, en uppsats om matematik och skeppsmätning av Nils Gustaf Nilsson, uppsatsen »Newtons tid och vår» av C. W. Oseen samt I. Wallers uppsats »Grundtankar i modern fysik». Av de recenserade arbetena ha två anmälts av Anna Beckman, ett av Carl Benedicks, tre av Sven Elvius, ett av H. J. Heyman, femton av Knut Lundmark, ett av N. V. E. Nordenmark, tre av C. W. Oseen och två av Ivar Waller. En del av dessa anmälningar äro mycket korta, men flera äro ganska

ingående. Så är bl. a. fallet med Anna Beckmans recension av ett engelskt arbete om upptäckten av det specifika och latenta värmet, samt med Oseens recensioner av dels A. Eddingtons New Pathways in Science, dels ett franskt arbete om den cartesianska fysikens utveckling 1646—1712.

Sistnämnda recension av Oseen står i nära samband med hans originaluppsats »Newtons tid och vår» (7 sid.), som ger en överraskande belysning av denna för fysiken avgörande brytningstid, som författaren jämför med vår egen tid. Även I. Wallers originaluppsats och recensioner erbjuda mycket av fysiskt-filosofiskt intresse.

Naturligtvis innehålla även en hel del andra uppsatser och recensioner åtskilligt, som står våra ämnen nära eller måste ha intresse från allmänt naturvetenskaplig synpunkt. Dit höra en längre uppsats av A. G. Högbom och en del anmälningar av bl. a. Axel Nelson.

Allt som allt är det icke lätt att slita sig från läsningen av denna även kvalitativt värdefulla volym med dess behagliga utstyrsel och goda illustrationer.

Den, som vid samfundets bildande ställde sig avvaktande, finner genom föreliggande årsbok, att samfundet även ägnar de naturvetenskapliga ämnena behörig uppmärksamhet och på detta område anlitar förnämliga pennor.

Conrad Lönnqvist.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, Bd. 14. P. A. Norstedt & Söner (i distribution), Stockholm 1936, 218 sid. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavgift kr. 10, medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. lic. fru Anna Beckman, Svartbäcksgatan 3, Upsala.

Årsbokens nya redaktör, fil. lic. fru Anna Beckman inleder det fjortonde bandet med korta biografier över 1936 års nobelpristagare i fysik och kemi, Hess, Anderson och Debeye. De först nämndas prisbelönade upptäckter gälla den kosmiska strålningen och dess verkningar. Denna strålnings ursprung och art är ännu ej fullt känd. Så mycket synes dock vara säkert, att den huvudsakligen består av elektriskt laddade partiklar, som devieras av jordmagnetiska fältet och skruvas ned mot jordytan, varvid de positiva infalla från västligt håll, de negativa från östligt. Partiklarna äro oerhört energirika, d. v. s. ha mycket stor hastighet. Hos enstaka partiklar ha energibelopp ända till 100 miljarder elektron-volt påvisats. Vanligast förekommande partiklar äro po-

sitroner och elektroner, men även protoner, α-partiklar och neutroner ingå i höjdstrålningen. Fru Beckman har skrivit en förträfflig översiktsartikal över detta ämne. Liksom allt vad som flyter ur hennes penna är även denna redogörelse utmärkt av klarhet och innehållsrikedom.

Efter ett par decenniers teoretiska och experimentella arbeten på utforskandet av atomernas byggnad ha åsikterna om elektronhöljets fysik nu stadgat sig. De starka meningsbrytningarnas tid är tills vidare förbi. Däremot är kärnfysikens stora utvecklingsepok nu inne. Experimentella fynd kastas i rask följd fram, bringa dagens teorier att förvandlas eller dö och låta nya teorier se dagens ljus. Man arbetar visserligen vidare med de föreställningar, som vid tolkningen av spektra visat sig så fruktbara, men kärnans värld är dock ännu en annan än elektronhöljets. Prof. O. Klein har företagit sig att ge en sammanställning av nyare teoretiska föreställningar om atomkärnornas struktur. Att bilden av kärnfysiken blir kaleidoskopiskt växlande allt eftersom läsaren konfronteras med olika författares åsikter, bekräftar blott, att vi ännu äro långt från den tidpunkt, då grundritningen till kärnans byggnad kan förklaras vara i sina huvuddrag fixerad. Vi äro förf. tacksamma för hans framställning, ty den låter oss blicka ned på ett märkligt, förut okänt land, än så länge visserligen till större delen skymt av moln och dimbankar.

Doc. Yngve Öhman beskriver konstruktionen av det nya jätteteleskop, som kommer att uppställas på ett berg 15 mil söder om Pasadena i Kalifornien. Spegeln, vars brännvidd blir 16,8 m och diameter 5 m förfärdigas av glas, som enligt en sinnrik metod överdrages med en tunn aluminiumhinna. Denna hinna får stor motståndskraft mot mekanisk åverkan tack vare det ytterst tunna oxidskiktet. I ultraviolett har spegelhinnan mycket högre reflexionsförmåga än silver, vilket blir av stor betydelse för de spektroskopiska undersökningarna av stjärnorna. Bearbetningen av plåtarna skall utföras vid en redan uppförd väldig geofysisk institution i Pasadena, vars rika instrumentella utrustning även beskrives.

En intressant översikt av resultaten från de sedan många år pågående försöken att med allt högre noggrannhet bestämma de fyra fundamentalstorheterna: ljusets hastighet i vakuum, elektronens specifika laddning e/m, elektronernas laddning e och Plancks konstant h, lämnas av doc. Sten v. Friesen. Tack vare Bäcklins, Kellströms och v. Friesens arbeten är det nu till full evidens visat, att Millikans värde på e, som i 20 års tid ansetts vara säkert på 1 promille, i själva verket är behäftat med en hel procents fel.

Utgående från Upsalaforskarnas nya *e*-värde anger förf. de tre sistnämnda fundamentalstorheternas sannolika värde.

Gasurladdningslampan, en modern utvecklingsform av Geisslerrören, användes numera ej blott som reklamljus. Sedan man kommit på tanken att förse lamporna med glödkatod, har det lyckats nedbringa driftspänningen så, att de kunna användas i direkt anslutning till belysningsnätet. Särskilt har kvicksilverhögtrycks-lampan visat sig vara en förträfflig ljuskälla med ett ljusutbyte ända till 60 lumen/watt. D:r G. Siljeholm har skrivit en alldeles förträfflig uppsats om dessa lampors konstruktion och verkningssätt.

Fil. d:r Sven Fagerberg påbörjar i detta band den första artikeln i en serie beskrivningar av större industrilaboratorier. Under författarens och laboratoriechefernas ledning får läsaren genomgå och i detalj studera ASEA-koncernens laboratorier i Västerås och Ludvika, och ta del av de olikartade arbeten, som där utföras. Det är en imponerande och glädjande bild författaren tecknar av tekniskt och vetenskapligt samarbete vid ett av våra ekonomiskt starkaste industriföretag.

Då man inom CGS-systemet uppbygger de fysikaliska storheterna på de tre grundenheterna, antages, att proportionalitetsfaktorerna exempelvis i kraftekvationen, Coulombs lag, Biot-Savarts lag, etc. äro dimensionslösa. Detta leder t. ex. till det bekanta förhållandet, att kvoten mellan dimensionerna för elektrostatisk och elektromagnetisk enhet för elektricitetsmängd blir en hastighet. Men, när är man berättigad antaga proportionalitetsfaktorn vara dimensionslös? Svaret blir, att det är en ren konventionssak. I en uppsats om de elektriska och magnetiska storheterna har fil. lic. Erik Ingelstam givit en synnerligen läsvärd framställning av de frågor, som för närvarande stå på dagordningen inom detta område av den fysiska vetenskapen. Bl. a. presenterar han det av Sommerfeld uppbyggda nya systemet med fyra grundenheter, som faktiskt är mer naturligt än CGS-syst. Mången torde med en suck konstatera, att inte heller vårt gamla CGS-system, »det absoluta», går fritt från kritik.

Förf. omtalar vidare, att de internationella enheterna amp., volt, etc. efter 1940 skola avskaffas och ersättas med absoluta praktiska. Således skall strömstyrkor anges i absoluta amp. $= {}^1/_{10}$ abs. CGS-enh., spänningar i absolut volt $= 10^{-8}$ CGS-enh. etc. Reduktionstalen mellan de absoluta praktiska och de internationella enheterna skola före 1940 genom den internationella kommissionens försorg vara bestämda med fem decimaler. Redan nu äro provisoriska

reduktionstal fastställda. Så är exempelvis 1 int. volt = 1,004 absolut volt.

Årsboken avslutas med lektor Kurt Molins redogörelse för 1928—1934 års jordmagnetiska uppmätning av Sveriges fastland. Av det rika observationsmaterialet meddelas en sammanfattning av deklinationsmätningarna. Tack vare observationsnätets täthet ha anomalierna i detalj kunnat fastställas och kartläggas. Mätningarna synas bli av stort intresse även för vår berggrundsgeologi.

M. Sjöström.

Hans Wallengren, *Världen och människan*, läsebok i naturlära. Första delen, Svenska Bokförlaget, Stockholm 1936, 338 sid., kr. 3:75.

I ovanstående bok behandlas följande grenar av naturläran: astronomi (förf. av lektor Fänge), kemi och fysik (förf. av lic. Anna Beckman) samt geologi (förf. av professorerna Wallengren och Grönvall). Endast de uppsatser, som beröra astronomiska, fysikaliska eller kemiska företeelser, skola bli föremål för behandling i denna rec. - - Läseboken avser enligt företalet att bilda »ett komplement till de läroböcker, som användas i våra skolor». Framställningen utgöres av en följd av artiklar, 24 st. med fysikaliskt eller kemiskt, 15 st. med astronomiskt innehåll. Var och en av dessa uppsatser bildar ett avslutat helt och kan i regel läsas utan kännedom om innehållet i de övriga.

Det skall genast erkännas, att böcker av denna typ utgöra välkomna inslag i den för skolbruk avsedda litteraturen. Det är nog mången lärare, som gärna velat hänvisa eleverna till en fylligare framställning än den, de rena läroböckerna pläga ge, men som funnit bristen på lämplig litteratur kännbar. För folkskolans och realskolans åldersstadier föreligger nu här en »bredvidläsningsbok», som av eleverna kan studeras med god behållning. Men härtill torde nog också dess användning vara begränsad. När utg. i företalet tänker sig, att boken »också utanför skolan bör kunna påräkna intresse hos en större allmänhet, som önskar få en något vidgad kännedom om den rika utveckling, naturvetenskaperna inom olika forskningsområden genomgått under senare tider», så tror jag, att han tar miste. Om man betänker att astronomi, fysik och kemi fått sig tilldelade sammanlagt 250 sidor, att på dessa sidor jämväl rymmas 138 figurer och slutligen att innehållet är fördelat på icke mindre än 39, relativt fristående, uppsatser, så

är det fullt begripligt, att framställningen med nödvändighet måste bli en smula ytlig. En vuxen, för populärvetenskap intresserad person har näppeligen någon glädje av att läsa en framställning om »Astronomien i forntiden» på icke fullt 2 sidor eller om »Den elektriska strömmen» på — figurerna inräknade — 7 sidor. »Ljuset i människans tjänst» behandlas i en annan av uppsatserna. Man väntar sig väl här — i enlighet med nyss citerade del av företalet — framför allt en framställning om den moderna, standardiserade elektriska glödlampan och de egenskaper, som äro utmärkande för denna, samt om de bl. a. i ljusskyltningen så allmänt använda urladdningslamporna. Men om allt detta finnes i texten ingenting. Och vad bildmaterialet angår, så har den elektriska belysningen ansetts kunna representeras av två figurer, varav den ena föreställer en elektrisk båglampa med regleringsmekanism (möjligen påträffbar i filmprojektorer på större biografteatrar) och den andra en gammalmodig klarglaslampa av s. k. päronform med rak glödtråd.

Liknande invändningar kunna riktas även mot en del andra artiklar, men det antydda må vara nog för att visa, att såväl text som bildmaterial åtminstone i vissa fall kunde ha gott av att undergå en föryngringskur i moderniserande syfte vid planläggningen av en kommande upplaga.

Rent sakliga oriktigheter ha insmugit sig i ovanligt liten utsträckning, och de få, som jag funnit, skall jag här inte ens omnämna, då de jämväl till sin karaktär synas mig jämförelsevis oskyldiga.

Till sist ett par anmärkningar mera i förbigående. När nu boken i första hand avsetts för skolbruk, så hade man bl. a. väntat sig, att det, i likhet med vad som i regel sker i undervisningen (åtminstone i realskolan och gymnasiet), gjorts åtskillnad mellan en kropps vikt (eller massa) och dess tyngd. Så har emellertid icke skett. Se t. ex. sid. 10! Vad beträffar enheterna för längd och vikt, så äro dessa betecknade på ett sätt, som icke överensstämmer med det nu brukliga och detta så genomgående, att man är böjd att misstänka, att någon utomstående — författarna ovetande — varit framme med rödpennan i korrekturet.

Det är inte omöjligt, att en och annan finner de båda sista anmärkningarna bagatellartade. Härtill kan jag endast svara, att, då en bok utgives för skolbruk, den får finna sig i att bli granskad även ur denna synpunkt.

Ernst Sedström.

C. Bergholm, *Lärobok i fysik. Värmelära.* Andra omarbetade uppl. J. A. Lindblads förlag, Uppsala 1937, 88 sid., kr. 2:—.

För ett år sedan utkom första delen av Bergholms omarbetade lärobok i fysik (se denna tidskr. årg. 1936, sid. 196). Andra delen finnes nu också i bokhandeln. Liksom i första delen finner man i denna ett genomgående nytt illustrationsmaterial och att uppställningen och utformningen av innehållet ha föga likhet med den äldre uppl., vilket naturligtvis delvis beror på den nya kursplanen och de metodiska anvisningarnas nya föreskrifter. — I ett förord frambär förf. ett tack till lektor R. Lundblad, för att han fått ta del av dennes duplicerade anteckningar från undervisningen vid läroverket i Luleå.

Inledningsvis behandlas temperatur, värmemängd, spec. värme och dess bestämning, varpå det övriga innehållet sammanföres under huvudrubrikerna: termisk utvidgning, energi, värmets natur, ändring av aggregationstillstånd, värmemotorer, meteorologi. — En klar framställning ges av fasta, flytande och gasformiga ämnens utvidgning. Man lägger märke till, att längdutvidgningskoeff. definieras som medelvärdet av längdökningen per grad, dividerad med längden vid 0°. För gasers uppvärmning vid konstant volym införes, så vitt jag vet för första gången i en svensk skolfysik, benämningen Charles' lag. Man får således namn på alla tre specialfallen av allmänna gaslagen. Som tillämpning på Charles' lag behandlas gastermometern. — I kap. »energi» genomgås läges- och rörelseenergi som inledning till värme som energiform och kap. avslutas med energiomvandlingar vid elastisk stöt. Härigenom erhålles goda förutsättningar att förstå molekylernas rörelseenergi och vad därmed sammanhänger. — I avd. »ändring av aggregationstillstånd» ges en mycket god framställning av smältning och stelning, ångbildning och kondensation. Till denna avd. borde nog också kylmaskinen ha förts. Nu behandlas den i samband med värmemotorerna, där den knappast hör hemma. — En kort meteorologikurs (8 sid.) avslutar det hela.

Beträffande i läroboken föreslagna försök vill jag göra ett par påpekanden. — Förf. anger, att man kan få vatten att frysa, om ett urglas med eter placeras i ett annat, som innehåller ett par droppar vatten, och bägge sättas under recipienten till en luftpump, varefter luften hastigt bortpumpas. Resultatet erhålles betydligt enklare, om urglaset med eter placeras i en droppe vatten på t. ex. en upp- och nedvänd glasskål. Man blåser på etern, och när denna så gott som helt avdunstat, är urglaset fastfruset vid glasskålen. — För att visa kokning vid temp. långt under 100°

skall man enligt Moll—Rudberg ta en rundkolv, koka upp vatten i denna och sluta den med en kork samt placera den upp och ned i en ring till ett stativ, så att kolvmynningen kommer under vattenytan i en under ringen placerad skål. Flertalet, som utfört detta försök, medge säkert, att det bereder vissa svårigheter, om det skall utföras helt och hållet som anvisningar och figur ange. Lektor Bergholm föreslår i stället, att man skall använda ett stort provrör, som fästes i en stativklämmare, så att vändningsproceduren underlättas. Men man måste anmärka, att även ett stort provrör är för litet vid demonstration för en hel klass. Själv använder jag numera en rundkolv med en gummipropp, varigenom går ett glasrör. På glasröret sitter en gummislang. När vattenångan drivit ut luften, sättes en klämmare omkring gummislangen, och kolven, som är fästad i en stativklämmare, vändes. Vid avkylningen kokar vattnet, och sedan försöket avbrutits, bestämmes vattnets sluttemp. Naturligtvis kan man även ha en termometer genom proppen och följa temperaturens gång hela tiden.

Förmodligen hade redogörelsen för bestämningen av spec. värmet, smältvärmet och ångbildningsvärmet blivit ännu bättre, om resonemanget förts med numeriska värden, såsom förf. gjort vid behandling av längdutvidgningskoeff. och Mayers beräkning. Med beteckningar erhålles formler, som man kan befara, svaga elever försöka lära in eller utnyttja för lösning av hemuppgifter, så att den nyttiga eftertanken äventyras. — I samband med energiprincipen säger förf., att all den erfarenhet, som vetenskapsmännen sedan Helmholtz samlat, utan undantag visar, att energien är oförstörbar. Detta är för mycket sagt i våra dagar, då övergången mellan materia och energi vid kärnreaktioner är ett flitigt studerat område.

Exempelsamlingen är riklig och värdefull (87 ex.). Man måste dock ställa sig reserverad, när förf. tycks vilja blåsa nytt liv i begreppet vattenvärde. Detta hittar man nämligen en gång i texten och i ej mindre än fem exempel (8, 9, 10, 51 och 73). De sista 30 åren har det ej förekommit i något studentexempel, såvitt jag kunnat finna. Det förkortar visserligen texten något vid kalorimetriska uppgifter, men detta är knappast tillräckligt skäl att ge det ny aktualitet.

Frånser man en del detaljer, där den enskilde läraren naturligtvis kan ha avvikande mening, tror jag, att man om den andra delen kan ge samma omdöme som om den första, att lektor Bergholm lyckats ge en ovanligt enkel och klar framställning av fysiken och dess lagar.

Helge Stolt.

Meddelande om ny materiell, häft. 11. P. A. Norstedt & Söners Skolmateriellavdelning, Stockholm 1937, 48 sid., kr. 2: —.

Av det i dagarna utkomna häftet ägnas väl hälften åt en utförlig beskrivning av en ny optisk bänk, konstruerad av lektor Albert Björkeson. Till beskrivningen äro fogade detaljerade redogörelser för 27 olika optiska demonstrationsförsök. Bänken kan med fördel användas även vid lärjungelaboratorierna. Som ljuskälla vid dessa försök begagnas lämpligen en likaledes av lektor Björkeson konstruerad lampa, vilken uppenbarligen erhållit sin utformning för att kunna tillfredsställa de mest skiftande önskemål. — Lektor Björkeson har även konstruerat en behändig apparat för bestämning av det elektriska ledningsmotståndets temperaturkoefficient (för järn).

En ny elektrisk generator och motor, en verklig universalmaskin, har lektor A. Nordhult till konstruktör. Den torde redan vara bekant för denna tidskrifts läsare från en beskrivning i decemberhäftet. Den behandlas ytterligare i en uppsats i detta häfte.

För studiet av växelströmmar har adjunkten C. Rendahl konstruerat en oscilligraf med tre svängande system. De tre speglarna belysas av en gemensam ljuskälla. Innan ljuset träffar dem, passerar det genom en glasskiva, vars övre och nedre tredjedel är belagd med röd respektive grön cellofanhinna. Den översta spegeln kommer därför att reflektera rött, den mellersta vitt och den nedersta grönt ljus. Härigenom uppnås, att de tre strömkurvorna komma att avteckna sig på skärmen i skilda färger. Apparatbeskrivningen utfylles av en redogörelse för de olika försök, som kunna utföras med den lättskötta och föga ömtåliga apparaten.

En annan mycket välkommen apparat, som häftet beskriver, är en ny lågfrekvensförstärkare, byggd av kand. Stig Lindholm. Den är avsedd att nätanslutas, har två transformatorkopplade elektronrör och är mycket åskådligt sammanställd med olikfärgade ledningar för de särskilda strömkretsarna. I det första rörets anodkrets kan en milliampèremeter inkopplas för påvisande av elektronrörets fundamentala egenskaper.

Med tillhjälp av denna förstärkare och en del tillsatsapparater kan ett flertal intressanta försök utföras, t. ex. förstärkning av en mikrofonström (ett fickurs tickande, tal och musik) och olika försök med fotocellen (alarmapparater, fotoelektrisk sirén, ljudfilm). Om en svängningskrets kopplas till förstärkaren, kan den generera växelström av de mest olika periodtal från svängningar så långsamma, att de kunna påvisas med en svängande galvanometervisare till svängningar av ljudfrekvens, ja ända till en frekvens

av 10 000 000 hertz, då man erhåller en bärvåg, som kan moduleras med lågfrekventa svängningar från en mikrofonkrets, varigenom apparaten således fungerar som kortvågssändare. Med lämpliga tillsatsapparater kan förstärkaren även användas för mottagning av vanliga radioprogram, och den tillåter även demonstration av principen för television.

Till sist finner man i häftet en del kortare notiser om nya apparater: reostater, skjutmotstånd, en ny natriumlampa, gasfyllda urladdningsrör, en kompressor, användbar bl. a. vid akustiska försök, modell av selenlikriktare samt synnerligen åskådliga modeller av elektriska mätinstrument.

Det innehållsrika häftet vittnar om utgivarens redan förut väl dokumenterade strävan att skaffa vårt skolväsende icke endast de bästa läroböcker utan även förstklassig undervisningsmateriell.

Ernst Herlin.

Gradualavhandlingar.[1]

Gösta Stenvinkel, *Das Bandenspektrum des Zinkhydrides. Störungen in den Bandenspektren zweiatomiger Moleküle.* Stockholm 1936. 96 sidor. Disp. vid Stockholms Högskola $^{25}/_{5}$ 1936. Opponenter: professor E. Hulthén och fil. lic. E. Olsson.

I inledningskap. gives en sammanfattande framställning av rotations- och kärnsvängsenergien för tvåatomiga molekyler särskilt med hänsyn till elektrontermerna $^2\Sigma$ och $^2\Pi$. För $^2\Pi$ påvisas, hur den av rotationen förorsakade ändringen av molekylens trögheтsmoment inverkar på elektrontermsuppspaltningen.

I andra kap. redogöres för zinkhydridens linjerika spektrum (c:a 35 000 linjer ha uppmätts). Tack vare att Stockholms Högskola förfogar över ett förträffligt gitter, har spektret kunnat upptagas under en mycket stor dispersion, som tillåter en ganska fullständig analys av detsamma. (Sålunda äro i de flesta fall de tre linjer, som emitterats av de tre isotopmolekylerna $Zn^{64}H$, $Zn^{66}H$ och $Zn^{68}H$ vid samma övergång, väl exponerade och i allmänhet separerade.) På grund av den stora dispersionen ha linjernas vågtal kunnat bestämmas med stor noggrannhet, varigenom de konstanter, som ingå i de teoretiska formlerna, kunnat noggrant beräknas. Genom insättning av dessa konstanter i formlerna beräknas därefter termvärdena. En jämförelse mellan dessa och

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

de empiriskt bestämda visa överensstämmelse inom mätfelen, vilket alltså bekräftar de teoretiska formlernas riktighet. (Denna prövning är ingen cirkel, ty konstanternas antal är väsentligt mindre än termvärdenas.) Härigenom konstateras även, att vissa påståenden vid formlernas uppställande äro riktiga. I $^2\Pi$-elektrontillståndet kan elektronens spinn kopplas på två sätt till banimpulsen, varigenom två deltillstånd uppkomma, som betecknas $^2\Pi_{1/2}$ och $^2\Pi_{3/2}$. Vid härledningen av formlerna antages (amerikanaren Van Vleck), att molekylens tröghetsmoment är lika i båda dessa tillstånd, vilket alltså får sin bekräftelse genom ovannämnda prövning. Vidare bekräftas även den ovannämnda, av författaren gjorda korrektionen. — För vissa termvärden överensstämma ej de beräknade och de empiriska värdena. Dessa termer äro »störda» varom mera nedan.

På grund av den ganska fullständiga analysen av spektret kan ur bandintensiteterna viss uppskattning erhållas av den relativa molekylfördelningen i det eregade $^2\Sigma^*$-tillståndet, en fördelning, som på ett naturligt sätt kan förklaras med hjälp av gängse vågmekaniska föreställningar. Vissa andra iakttagelser angående onormal gång i intensiteten för linjer tillhörande ett och samma band utgöra goda illustrationer till dessa vågmekaniska föreställningar.

I slutet av andra kap. prövas isotopuppspaltningsformlerna på de linjer, som emitteras av isotopmolekylerna $Zn^{64}H$ och $Zn^{68}H$. Överensstämmelsen mellan beräknad och uppmätt uppspaltning är god utom för de störda termerna.

En stor del av avhandlingen ägnas dessa störda termer. Den holländske teoretikern Kronig har utvecklat teorien för störningarna. Om ett rotationskärnsvängningstillstånd har ung. samma energi som ett annat, tillhörande en annan elektronterm, kunna dessa störa varandra, om dessutom vissa andra betingelser äro uppfyllda. Störningen yttrar sig bl. a. på så sätt, att den av de båda termerna, som har den största energien, får ett litet energitillskott, medan den andra termen erhåller ett lika stort energiavdrag. Dessa termer avvika alltså något från den regelbundna gången i energi för rotationstermer, som tillhöra samma kärnsvängningstillstånd. Kronig och hans lärjunge Ittmann ha beräknat denna förskjutnings storlek för vissa elektrontermer. Förf. ger beräkningen för det här aktuella fallet, nämligen att en $^2\Sigma$-term och en normal $^2\Pi$-term störa varandra. Kronigs teori har kvalitativt bekräftats i ett par fall, där de båda störande termerna äro kända. I ZnH:s spektrum, som utmärkes av talrika störningar, förekomma åtskilliga fall, där båda de störande termerna äro

kända. Förf. bringar genom en enkel omräkning slututtrycket för störningsbeloppet till en för prövning lämplig form, och verkställer en kvantitativ prövning av detsamma. De därvid erhållna värdena på vissa matrixelement stå i god överensstämmelse med teorien.

Emedan termer tillhörande olika isotopmolekyler, t. ex. $Zn^{64}H$ och $Zn^{68}H$, i allmänhet störas olika mycket, bör isotopuppspaltningen för störda termer vara onormal. Förf. beräknar uppspaltningens storlek i dessa fall och ger vissa översiktsregler för densamma.

När termerna äro starkt störda, uppkomma ibland extralinjer, för vilka Ittmann givit en vågmekanisk förklaring. Sådana extralinjer förekomma på flera ställen i ZnH:s spektrum, där endast den ena av de störande termerna är känd. Tack vare den onormala isotopuppspaltningen kan störningsteorien prövas även i dessa fall. Och denna prövning bör lämna säkra resultat angående teoriens riktighet, emedan isotopmolekylernas potentialkurvor äro nästan lika. Det visar sig även, att de beräknade värdena helt överensstämma med de empiriska.

Ur extralinjernas beskaffenhet (Q-linje saknas) utläses en bestämd egenskap för motsvarande terms vågfunktion. Detta resultat tillämpas sedan på HgH:s spektrum, varigenom några egendomliga intensitetsanomalier i detta spektrum, beskrivna av doc. Rydberg, få en naturlig förklaring.

Störningsformlerna tillämpas dessutom på HgH:s och CdH:s spektra, varvid visas, att storleksförhållandena mellan störningsbeloppen i dessa spektra, jämförda med störningarna i ZnH:s spektrum, stå i överensstämmelse med vad teorien fordrar.

Erik L. Petterson, *Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome.* Stockholm 1936. 96 sid. Disp. vid Uppsala Universitet 14 nov. 1936. Opponenter: prof. T. Nagell och fil. lic. H. Bergström.

Om ett heltaligt polynom $f(x)$ är reducibelt i två heltalspolynom $A(x)$ och $B(x)$, d. v. s.

$$f(x) = A(x)\ B(x)$$

så erhåller man för $x = 0$:

$$f(0) = A(0)\ B(0).$$

Denna likhet utsäger, att de konstanta termerna av $A(x)$ och $B(x)$ äro helhetsfaktorer i konstanta termen till $f(x)$ och är därmed fullständigt grundläggande för irreducibilitetskriterier i allmän-

het. Om $f(0)$ innehåller många faktorer, så kan dock denna enstaka likhet ensam endast ge triviala irreducibilitetsvillkor. De faktorsuppdelningar av $f(0)$, som kunna svara mot de eventuella faktorsuppdelningarna av $f(x)$, kan man i vissa allmänna fall avsevärt begränsa. I föreliggande avhandling har förf. nämligen för rötterna ξ_ν till ett normerat heltalspolynom $f(x)$ infört en gemensam exponent P modulo ett helt tal E enligt kongruenserna

$$\xi_\nu^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

För de konstanta termerna $A(0)$ och $B(0)$ måste då gälla:

$$(\pm A(0))^P \equiv 1 \pmod{E}, \quad (\pm B(0))^P \equiv 1 \pmod{E},$$

varav man ibland erhåller så skarpa irreducibilitetsvillkor, att allmänna irreducibilitetsfall för $f(x)$ kunna fastställas, även när $f(0)$ har många faktorer. Som enkelt exempel må följande irreducibilitetskriterium anföras:

Givet är ett normerat heltalspolynom $f(x)$ av formen

$$f(x) = x^m + E\ h(x)\, x + a.$$

Om v är minimalexponent till kongruensen

$$(-a)^v \equiv 1 \pmod{E},$$

och om a icke innehåller någon positiv eller negativ äkta faktor d med egenskapen

$$d^{mv} \equiv 1 \pmod{E},$$

så kan $f(x)$ vara reducibelt, endast om åtminstone en algebraisk enhet är rot.

Genom att kombinera denna metod med den irreducibilitetsteori som med hjälp av Newtons polygon utarbetats av bl. a. Dumas (1906) och Ore (1923) är det i vissa fall möjligt att framtvinga irreducibilitet, även när Newtons polygon endast ger triviala villkor.

Sin här angivna kongruensmetod har förf. väsentligt generaliserat, i och med att han infört ett hjälppolynom $g(x)$ och ersatt kongruenserna

$$\xi_\nu^P \equiv 1 \pmod{E} \text{ med } g(\xi_\nu)^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

I stället för polynomens konstanta termer får man då räkna med de resultanter, som dessa polynom bilda med $g(x)$.

Ovan nämnda och andra kongruensmetoder äro framställda i avhandlingens kap. I, II och III.

I kap. IV visas bl. a., att gradtalen till alla faktorer av vissa polynom av formen

$$f(x) = g(x)^m + N(x)[EM(x)g(x) + a\ V(x)] \text{ med Grad } g(x) = k$$

äro multiplar av m, om $|E| > 1 + |a|^{mk-1}$ och $|a|$ aldrig är en l-te potens av ett helt tal, när l är faktor i m. För $g(x) = x$ följer ett irreducibilitetsfall med T. Nagells irreducibilitetsvillkor och för $N(x) = V(x) = 1$ och $M(x) = x^{t-1}$ erhålles Nagells irreducibilitetssats.

I kap. V angivas irreducibilitetsfall, som bero av rötternas läge i komplexa talplanet. Som specialfall följer irreducibilitet av

$$f(x) = g(x)\,x + a,\ a \neq 0,$$

om alla rötter till $g(x)$ äro reella och $\neq 0$, och om den absolut minsta roten till $|g(x)| = 1$ är absolut $> |a|$.

I kap. VI visas, att gradtalen till de polynom, som äro faktorer i

$$f(x) = g(x)^n M(x) + N(x)$$

men icke i något polynom av formen $g(x)^t - 1$, måste gå mot oändligheten när $n \to \infty$. De heltaliga polynomen $N(x)$ och $g(x) \cdot M(x)$ förutsättas därvid sakna gemensam faktor.

I kap. VII är för ett ganska allmänt fall bevisat, att antalet reducibla polynom i Hilberts irreducibilitetssats är ändligt. Såsom ett specialfall kan erhållas, att

$$f(x) = g(x) + E\,h(x)$$

är irreducibelt för alla tillräckligt stora hela E. Därvid skola $g(x)$ och $h(x)$ sakna gemensam faktor och uppfylla villkoret Grad $g(x) =$ Grad $h(x) + 1$.

I kap. VIII ha bl. a. utförts generaliseringar av Ores undersökningar över irreducibilitet modulo ett primtal p för polynom av formen

$$f(x) \equiv g(x)^m - a \pmod{p},\ f(x) \equiv g(x)^p - g(x) + a \pmod{p}.$$

Exempelvis gäller, att gradtalen till alla faktorer (mod p) till polynomet

$$f(x) \equiv g(x)^{p^t} - g(x) + a \pmod{p}$$

äro multiplar av p^{e+1}, om $p^e \mid t$ och $p \nmid a$.

Leo Törnqvist, *Kriterien für die reellen algebraischen Zahlen, arithmetische Ketten und diophantische Approximationen*, Acta Academiae Aboensis, math. et phys. X, 7. Åbo 1937. 95 sidor. Disputation vid Åbo Akademi den 16 jan. 1937. Opponent: prof. Nils Pipping.

Den norske matematikern Viggo Brun har angivit en enkel aritmetisk kedja med vars tillhjälp man kan erhålla ett kriterium för algebraiska tal av andra graden. Brunkedjan fås genom att

ur ett utgångssystem av $n+1$ positiva olika stora tal bilda nya system

$$S^{(1)},\ S^{(2)},\ \ldots,\ S^{(\nu)} = \left(v_0^{(\nu)} > v_1^{(\nu)} > \ldots > v_n^{(\nu)}\right)$$

medelst övergången

$$S^{(\nu+1)} = \left(v_0^{(\nu)} - v_1^{(\nu)},\ v_1^{(\nu)},\ \ldots,\ v_n^{(\nu)}\right).$$

Om man på detta sätt får ett system med två lika stora värden, säges kedjan avstanna. Man kan lätt visa, att Brunkedjan av första ($n=1$) och andra ($n=2$) ordningen avstannar alltid och endast, om mellan utgångssystemets värden existerar ett rationellt samband. $\left(\sum_{\mu=0}^{n} V_\mu^{(0)} v_\mu^{(0)} = 0,\ V_\mu^{(0)} = \text{helt tal}\right)$. Man har icke kunnat avgöra, huruvida satsen även är riktig för $n>2$. De förgrenade aritmetiska kedjor, som angivits av Nils Pipping, avstanna däremot bevisligen under denna förutsättning. För fallet $n=3$ har han angett ett par Brunkomplementövergångar, som, ifall de användas för att i vissa fall $\left(v_1^{(\nu)} < v_2^{(\nu)} + v_3^{(\nu)}\right)$ förgrena den medelst Brunövergångar erhållna kedjan, säkerställa avstannandet i händelse av ett rationellt samband mellan utgångssystemets värden. De kedjor, som Pipping bevisat föra till målet i fallet $n>3$, äro starkt förgrenade.

Efter att ha givit en kort översikt över tidigare vunna resultat på detta område av teorin för de reella algebraiska talen anger författaren fyra nya Brunkomplementövergångar, som på ett enklare sätt kunna bevisas föra till målet än de tidigare bekanta övergångarna och som i användning äro effektivare än dessa, i det att avstannandet sker efter ett färre antal övergångar.

Avhandlingens huvudresultat består i angivandet av en *oförgrenad* aritmetisk kedja, *L*-kedjan, som har egenskapen att alltid och endast avstanna, om mellan utgångssystemets värden existerar ett rationellt samband. *L*-kedjan definieras genom övergången

$$u_r^{(\nu+1)} = u_r^{(\nu)};\quad \nu = r \pmod{n+1}$$

$$u_\lambda^{(\nu+1)} = \left| l_r^{(\nu)} u_\lambda^{(\nu)} - l_\lambda^{(\nu)} u_r^{(\nu)} \right| \leqq \tfrac{1}{2} u_r^{(\nu)};\quad \lambda \neq r.$$

Talen $l_\lambda^{(\nu)}$ beteckna härvid hela tal; $l_r^{(\nu)}$ är det minsta hela tal l för vilket $s^{(\nu,\,l)} = \sum_{\lambda \neq r} u_\lambda^{(\nu,\,l)}$ är $\leqq u_r^{(\nu)}$, då $u_\lambda^{(\nu,\,l)} = \left| l u_\lambda^{(\nu)} - l_\lambda^{(\nu,\,l)} u_r^{(\nu)} \right| \leqq$ $\leqq \tfrac{1}{2} u_r^{(\nu)}$, $l_\lambda^{(\nu,\,l)} =$ ett helt tal. Kedjan säges avstanna i följande fall:

1) $u_\lambda^{(\nu,\,l)} = 0$, 2) $u_{\lambda_1}^{(\nu,\,l)} = u_{\lambda_2}^{(\nu,\,l)}$, 3) $u_\lambda^{(\nu,\,l)} = \tfrac{1}{2} u_r^{(\nu)}$, 4) $s^{(\nu,\,l)} = u_r^{(\nu)}$.

I fallet $n = 3$ är det för L-kedjan mest karakteristiska talet $l_r^{(\nu)} = 1$ eller 2. I kapitlet angående diophantiska approximationer visas, att $l_r^{(\nu)}$ alltid är mindre än $n!$.

L-kedjans effektivitet är mycket stor, i det att det blott behöves ett relativt litet antal övergångar för att kedjan skall avstanna även i händelse av stora heltaliga koefficienter $U_\lambda^{(0)}$ i den likhet $\sum_{\lambda=0}^{n} U_\lambda^{(0)} u_\lambda^{(0)} = 0$, som anger det rationella sambandet mellan utgångssystemets värden. Genom att tillämpa L-kedjan på utgångssystemet $(1, w, \ldots, w^n)$, där w är ett positivt tal, erhålles en kedja som betecknats $L_n(w)$-kedjan. Denna kedja ger följande kriterium för algebraiskt tal av n:te graden: *Ett reellt tal $w > 0$ är ett algebraiskt tal av n:te graden alltid och endast, om $L_n(w)$-kedjan avstannar, medan $L_{n-1}(w)$-kedjan utfaller oändlig.*

Vid studiet av de diophantiska approximationerna (kap. V.) användes principen, att man icke kan placera mer än $\frac{1}{J} - 1$ kroppar med volymen J per volymsenhet, utan att de olika kropparna få någon gemensam punkt. Kapitlet innehåller fem satser.

I kap. VI studeras vissa för de aritmetiska kedjorna karakteristiska storheter. Härvid erhålles för L-kedjan en motsvarighet till kedjebråkens konvergenssats.

I kapitel VII studeras periodiska L-kedjor, varvid det framgår, att ifall L-kedjan blir periodisk, så äro förhållandena mellan utgångssystemets värden algebraiska tal av $(n+1)$:sta graden.

I det sista kapitlet utnyttjas en periodisk, aritmetisk kedja för erhållandet av en ny metod för numerisk lösning av algebraiska ekvationer. Kedjemetoden, som har en del beröringspunkter med Hadamards och Whittakers lösningsmetod, kan med framgång tävla med tidigare bekanta lösningsmetoder.

Föredrag under hösten 1936 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. mag. E. Berg.

Föredrag: fil. mag. E. Berg, Cykliska tal (2/12).

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, se detta häfte sid. 50.

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: prof. E. Larsson, Problem från svavlets kemi (19/9); fil. mag. B. Sjöberg, Studier över tioglyceriner (19/9); prof. H. Staudinger (Freiburg), Die makromolekulare Chemie (23/10); disp. A. Höglund, Biblioteken och forskningen (27/11); fil. lic. E. Eftring, Ett konduktometriskt mätningssätt vid snabba reaktioner (27/11); fil. mag. K. J. Karlsson, Bestämning av sublimationsvärmen i Wolfs apparatur (27/11); prof. L. Smith, K. W. Scheele, ett 150-årsminne (18/12); stadsingenjör M. Wennström, Några erfarenheter ang. rening av avloppsvatten (18/12 tillsammans med Skånska Ingenjörsklubben).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. A. Pleijel.

Föredrag: doc. S. Wigert, Ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ (16/12).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: fil. lic. Gösta Funke, Slutsatser rörande fleratomiga molekylers struktur ur rotationssvängningsspektra, särskilt med avseende på acetylén (28/9); prof. O. Klein, Teoretiska föreställningar om atomkärnan (26/10); doc. E. Rudberg, Några intryck av fysikundervisning och forskning i U. S. A. (23/11); fil. kand. E. Tengström, Är det möjligt påvisa ändringar i jordens rotationshastighet medelst kvartsur? (7/12).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Se detta häfte sid. 42.

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. fil. lic. fru Anna Beckman.

Föredrag vid årsmötet 21/11: civiling. Torsten Willner, Några studier rörande gasjonisation; fil. lic. J. Tandberg, Demonstration av inducerad radioaktivitet; civiling. G. Schönander, Ett nytt, skarptecknande röntgenrör.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: prof. H. Staudinger (Freiburg), Konstitutionsaufklärung der Cellulose (22/10 tills. med Kemistsamfundet och Kemiska sällskapet i Uppsala); Dr. H. Prausnitz (Jena), Über neuere Glasapparate für das chemische Laboratorium, unter besondere Berücksichtigung der Jenaer Glasfilter (27/11 tills. med Kemistsamfundet).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: doc. A. Beurling, Om primtalsfördelningen ($^{26}/_{11}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Gunnar Kellström, v. ordf. docent Hannes Alfvén.

Föredrag: fil. dr. Arne Sandström, Temperaturbestämning i elektriska urladdningar vid Utrechtlaboratoriet ($^{4}/_{11}$); fil. lic. Sven Arrhenius, Bestämning av äggviteämnens molekylstorlek och laddningsfördelning medelst kapacitetsuppmätningar ($^{7}/_{12}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. docent P. Nylén, sekr. docent A. Fredga.

Föredrag: $^{22}/_{10}$ tills. med Kemiska sällskapet i Stockholm, se ovan; fil. lic. O. Lamm, Stärkelsekornets lösbarhet ($^{17}/_{11}$).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XVII, 1936: 3—4.

Ur innehållet: J. M. Ramberg, Om atmosfärens ljusstrålning; Å. Wallenquist, Intryck från astronomiska observatorier i Japan; K. G. Malmquist, Några problem inom den fotografiska fotometrien; E. Johansson, Småplaneterna; B. Lindblad, Nya stjärnor under år 1936; N. Tamm, Nya stjärnor i Örnens stjärnbild; N. V. E. Nordenmark, Regiomontanus, ett 500-årsminne.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1936: 2—4.

Ur innehållet: H. N. Russel, Planeternes Atmosfærer; G. Wernberg, Nyare undersökningar över ljusabsorptionen i världsrymden; K. Lous, Litt om de gamle formørkelser; A. V. Nielsen, Lyskurven for Nova Lacartae; A. H. Joy, Bygningen af Kempekikkerten; E. Strömgren, Om Ole Rømers Mikrometer; H. Ludendorff, Tilfældigheden i Astronomien; J. P. Møller, Problemet i astronomisk Tidsbestemmelse. Litteratur og Mindre Meddelelser.

IVA, utg. av Ingenjörsvetenskapsakademien. Årg. 1936: 2—4, 1937: 1.

Ur innehållet: Aerodynamisk försöksanstalt; Värmebehandlingens inverkan på egenskaperna hos manganin; Toppresultat inom den nuvarande mättekniken; Bestämning av vattnets hårdhet medelst tvållösningar; Bensin- och smörjoljor ur trätjära, skifferolja m. fl. genom hydrering; Nya biokemiska rön; Flera mättekniska notiser.

ERA. Årg. 1936: 3—12, 1937: 1.

Ur innehållet: Kraftbyggnaderna vid Malfors; Elektricitet och flyg; Krångede kraftverk; Statsbaneelektrifieringens omformarestationer; Elektriska kokplattor för klenspänning; Felsökning i radiomottagare; Ljuset och arbetet; Förslaget till statliga säkerhetsföreskrifter; Flera artiklar från en amerikansk studieresa; Notiser om elektriska nyheter.

Tidskrift för ljuskultur. Årg. 1936: 2—4.

Ur innehållet: Vad är ljus?; Armaturglasens ljustekniska egenskaper; Belysningspsykologien och de nya ljuskällorna; Tekniska museets be-

lysning; Ljusenheter och fotometreringsmetoder; Ett stort antal notiser om belysningstekniska nyheter.

Industritidningen Norden. Årg 1936: 28—52, 1937: 1—8.

Ur innehållet: Svenskt konstsilke och konstull; Syntetiska lacker; Användning av ultraljudvågor inom industrin; Den internationella tekniska utvecklingen (Ur Ingenjörsvetenskapsakademiens berättelse); Bromma flygfält; Om svenska uppfinnareföreningen; Giftfri kokgas; Högfrekventa radiostörningars oskadliggörande; Ny metod för optisk ytundersökning; Rudolf Diesel. Ett stort antal notiser om nya uppfinningar och patent i varje häfte.

Matematisk Tidsskrift, København, 1936: 1—4.

Ur innehållet: i avd. A. J. Hjelmslev, Om Talstrækninger; F. Fabricius Bjerre, Om harmonisk forbundne punkter; J. Hjelmslev, Ligedannethed som Størrelseprincip; P. Mogensen, Om Tangentbestemmelser; H. Bohr, Talteoriens Elementer; H. C. Espensen, Om geometriske Konstruktionsopgaver; B. Jessen, Den elementære Talteoris Hovedsætning; G. Boldsen, Numerisk beregning af integraler; Eksamensopgaver.

Fysisk Tidsskrift, København, 1936: 2—6.

Ur innehållet: C. V. Thyman, Svæveflyvning; H. Petersen, Om frontologisk Vejrkortanalyse og dennes Anvendelse som Grundlag for Vejrforudsigelser; K. Meyer, f. Bjerrum, Fahrenheits Termometer — Ole Rømers Termometer; P. Jarnak, Violinen og Orgelpiben; N. Bohr, Atomkernernes Egenskaber; K. B. Mønsted, Elevøvelser fra Svingningslæren.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo, 1936: 1—4.

Ur innehållet: R. Tambs Lyche, Er funktionerne maskiner eller er de organismer?; B. Bjerke, Sannsynlighetsregningens fundamentalsetninger i generell form; J. Lotherington, Beregning av kvadratroten av et tall, særlig med sikte på anvendelsen av regnemaskin; B. Meidell, Alf Guldberg; W. Werenskiold, Litt om de såkalte hyperbelfunksjoner; I. Johansson, Ikke-euklidisk elementærgeometri og trigonometri; V. Brun, Über die Möglichkeit für π eine Gesetzmässigkeit in den Dezimalen zu entdecken; O. P. Arvesen, Litt om Laguerres retnings-geometri; Eksamenopgaver og opgaver til løsning.

Naturen. Utgitt av Bergens Museum. Årg. 1936: 6—12.

Ur innehållet: C. W. Carstens, Om malmforekomstenes forhold i dypet; S. Evjen, Litt om forsøk på langtidsvarsling; B. Trumpy, Atomspaltning og kunstig radioaktivitet; J. E. Fjeldstad, Geofysikk og matematikk; O. Pettersson, Solflekkenes perioder; Notiser: Det letteste og det tyngste kjente stoff, Kunstig kautschuk m. m.

Den Høire Skole, Oslo. Uppsatser med matematiskt-naturvetenskapligt innehåll i årg. 1936:

A. Braanaas, Apparater demonstrert på fysikkseksjonsmøte; B. Cramer, Matematikk (Om räkning med dimensioner); T. N. Kvicksølvforgiftning i skolene; R. Krekling, Elektriske svingninger; O. Lindstad, Vekselstrømmotstand; J. Rødseth, Vekselstrømmotstand; K. Dørum, Engelsk myntprocentregning; Flera inlägg ang. matematikens ställning i föreliggande förslag till ny undervisningsplan.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

882) *I en triangel, vars alla sidor äro olika, dragas höjderna, bissektriserna och medianerna. Dessa linjers skärningspunkter med motstående sidor äro* H_1, H_2, H_3, B_1, B_2, B_3 *och* M_1, M_2, M_3, *varvid samma index hänför sig till skärningspunkter med samma sida. Bevisa, att*

$$\frac{H_1B_1}{B_1M_1}\cdot\frac{H_2B_2}{B_2M_2}\cdot\frac{H_3B_3}{B_3M_3}=\left(\frac{2p}{R}\right)^2,$$

där $2p =$ *triangelns omkrets,* $R =$ *den omskrivna cirkelns radie.*

Stig Comét.

883) *En tung kropp, vridbar utan friktion omkring en vågrät axel, befinner sig i jämvikt. Om vikten A upphänges i en punkt på kroppen, vrider den sig vinkeln* α *till sitt nya jämviktsläge. Utbytes A mot B, erhålles i stället vridningsvinkeln* β. *Vilken belastning hör till vridningsvinkeln* $\frac{\alpha+\beta}{2}$*?* *X.*

884) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} x^n + ry^pz^{n-p} &= a \\ y^n + sx^{n-p}z^p &= b \\ rsz^n - x^py^{n-p} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ö.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

885) Upplös $(x+y)^4 + x^4 + y^4$ i faktorer.

Svar: $2(x^2+xy+y^2)^2$.

886) Om $a:b=c:d$, så är $d\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}+\frac{s}{d}\right)-\frac{1}{a}(sa+rb+qc+pd)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 885—886, 892, 894—895 äro insända av *X.*, 887—889, 891, 893, 899, 900 av *S. B.*, 890 av *B. E. N.*, 896—898 av *C.-E. Fröberg.*

887) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} 5x^2 &= 9x + 4y + 6 \\ 5y^2 &= 4x + 9y + 6 \end{aligned}\right\}.$$

Svar:

x	3	2	-1	$-0{,}4$
y	3	-1	2	$-0{,}4$

888) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y &= 1\tfrac{5}{16} \\ x + y^2 &= 1\tfrac{5}{16} \end{aligned}\right\}.$$

Svar:

x	$\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$

889) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5xyz \\ x + z &= 8xyz \\ y + z &= 9xyz \end{aligned}\right\}.$$

Svar:

x	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
z	0	1	-1

890) Lös ekvationen $\dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{2}{\sin 2x} = 1 - 2\cot 2x$.

Svar: $36°{,}87 + \text{n. } 360°$.

891) En fyrhörning $ABCD$, i vilken $AB = 3$ dm, $BC = 4$ dm, $CD = 9$ dm och $DA = 6$ dm, är försedd med ledgångar vid hörnen så, att vinklarna kunna varieras. Vid två tillfällen är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln C. Hur stor är ytan då (exakt)?

Svar: $10\sqrt{5}$ och $16\sqrt{2}$ dm^2.

892) Punkterna A (2; 0), B (3; 0), C (6; 0), D (9; 0) äro givna. Sök orten för en punkt P, som rör sig så, att $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$.

Svar: En cirkel $x^2 + y^2 = 18$.

893) Linjen $x + y = 4{,}2$ är radikalaxel till cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ och en annan cirkel med radien 3. Bestäm ekvationen för denna cirkel.

Svar: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ eller $(x + 0{,}8)^2 + (y + 0{,}8)^2 = 9$.

894) Genom en tangent till ett klot läggas två plan, som dela klotytan i tre lika delar. Bestäm vinkeln mellan dessa plan.

Svar: $38°{,}94$.

895) I bascirkeln till en rät kon med spetsen S är en liksidig triangel ABC inskriven. Om konens toppvinkel är lika med baskantvinkeln i pyramiden $S(ABC)$, vilket är dessa vinklars gemensamma värde?

Svar: $70°{,}53$.

896) I en rät kon inskrives en sfär. Ovanför denna inskrives en ny sfär, tangerande den förra och mantelytan o. s. v. i oändlighet.

För vilken toppvinkel hos konen inträffar, att summan av alla sfärernas volymer blir hälften av konens volym?

Svar: 53°,13.

897) Sök ekvationen för en kurva så beskaffad, att ytan av den triangel som begränsas av kurvans normal, motsvarande ordinata och x-axeln är konstant $= a^2$.

Svar: $y^3 = 6a^2x + C$.

898) För en vanlig räknesticka, där den övre skalan ger kvadraten på motsvarande tal på den undre, gäller följande: Avstånden (på den övre skalan) mellan delstrecken 1 och 2, mellan 1 och 3 och mellan 1 och 10 äro resp. a, b och c. Visa, att avståndet mellan delstrecken 5 och 6 på den undre skalan är $2(2a + b - c)$.

899) Diskutera kurvan $y = \cos(\sin x)$.

900) En linje genom origo O skär linjen $bx + ay = ab$ i P och linjen $3bx - 2ay = 6ab$ i Q. Angiv linjens ekv., om $OQ = 4 \cdot OP$.

Svar: $ay = 9bx$ eller $7ay = 3bx$.

Lösningar till uppg. 846—848.

846) *Sök vinklarna i den största av de i en given cirkel inskrivna trianglar, i vilka en vinkel är 60° större än en annan.*

Stig Comét.

Om cirkelns radie $= R$ och triangelns vinklar x, $60° - \frac{x}{2}$ och $120° - \frac{x}{2}$, blir ytan $2R^2 \sin x \sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) \sin\left(120° - \frac{x}{2}\right) =$ $= R^2 \sin x \left[\cos 60° - \cos(180° - x)\right] = \frac{R^2}{2}(\sin x + \sin 2x)$. Härav fås $y' = \frac{R^2}{2}(\cos x + 2\cos 2x)$, $y'' = -\frac{R^2}{2}\sin x\,(1 + 8\cos x)$. Sättes $y' = 0$, fås $\cos x = \frac{1}{8}(-1 \pm \sqrt{33})$, där det övre tecknet gör $y'' < 0$. Maximum inträffar alltså för $x = 53°,62$; $60° - \frac{x}{2} = 33°,19$ och $120° - \frac{x}{2} = 93°,19$. Behandlas på samma sätt det allmännare fall, då vinklarnas skillnad är α, finner man att ytan

$$= \frac{R^2}{2}(2\cos\alpha \sin x + \sin 2x)$$

blir maximum, om $\cos x = \frac{1}{4}(\sqrt{8 + \cos^2\alpha} - \cos\alpha)$. *B—r.*

Även löst av *E—d. S—mn., S. L., C.-E. Fröberg.*

847) *Hur många reella rötter har ekvationen*

$$x^2 + 2x - \log\left(x^2 + 2x + \tfrac{5}{4}\right) = 0?$$

(log betecknar naturliga logaritmen). *Stig Comét.*

Om vänstra ledet betecknas med y, fås $y = (x+1)^2 - 1 - \log\left[(x+1)^2 + \tfrac{1}{4}\right]$, varav synes, att linjen $x = -1$ är en symmetrilinje till den kontinuerliga funktionskurvan. Av

$$y' = \frac{2(x+1)\left[(x+1)^2 - \tfrac{3}{4}\right]}{(x+1)^2 + \tfrac{1}{4}}$$

synes, att $y_{\max} = \log 4 - 1 = 0{,}3863$ för $x = -1$ och $y_{\min} = -0{,}25$ för $x = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Då vidare $y \to +\infty$, när $x \to \pm\infty$, måste kurvan skära x-axeln 4 gånger. Det finnes sålunda 4 rötter x_1, x_2, x_3 och x_4 begränsade av villkoren $-\infty < x_1 < -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < x_2 < -1 < x_3 < -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < x_4 < +\infty$. Rötternas approximerade värden äro $x_1 = -2{,}28$; $x_2 = -1{,}45$; $x_3 = -0{,}55$ och $x_4 = 0{,}28$. *S. L.*

Även löst av *B—r, C.-E. Fröberg, E—d. S—mn.*

848) *Mot en sida i en triangel dragas höjden, bissektrisen och medianen. De skära triangelsidan i punkterna H, B och M resp., vilka ej sammanfalla. Sök gränsvärdet av förhållandet mellan sträckorna HM och BM, då triangeln tenderar att bli liksidig.*

Stig Comét.

Om sidorna äro a, b och c $(b < c)$ samt linjerna dragas mot sidan a, fås $CM = \frac{a}{2}$; $CB = \frac{ab}{b+c}$; $CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$; alltså $HM = \frac{c^2 - b^2}{2a}$ och $BM = \frac{a(c-b)}{2(c+b)}$. Så länge $b < c$, kan kvoten $HM : BM$ förkortas med $c - b$ och blir då $\frac{(b+c)^2}{a^2}$. Då b och c båda närma sig a, får detta uttryck gränsvärdet 4.

B—r.

Även löst av *E—d. S—mn, S. L., C.-E. Fröberg och Lars Krogset.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.[1]

Januari 1937.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. En regelbunden niohörnings minsta diagonal är 7 cm. Beräkna dess största diagonal.
2. ABC är en liksidig triangel, vars sida är 8 cm. P är en punkt inuti triangeln, så belägen, att $PA = 6$ cm och $PB = 5$ cm. Beräkna PC.
3. $ABCD$ är en rektangel, i vilken $AB = 4$ dm och $BC = 3$ dm. E är en punkt på AB, så belägen, att DE är vinkelrät mot diagonalen AC. Beräkna ytan av fyrhörningen $EBCD$.
4. Lös ekvationen

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{x}\right)\left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2} = \frac{3}{x}.$$

5. En oändlig geometrisk series tredje term är 6. Den andra termen är $\frac{2}{9}$ av seriens summa. Beräkna den första termen.
6. En cirkel, som går genom hörnpunkterna A och D i kvadraten $ABCD$, tangerar sidan BC i E och skär sidan AB i F. Beräkna ytan av triangeln DEF, då kvadratens sida är 12 dm.
7. En cirkelsektors medelpunktsvinkel är 90°. Bågens mittpunkt sammanbindes med mittpunkten på en av radierna. I vilket förhållande delas sektorns yta av denna sammanbindningslinje?
8. I en likbent triangel är en kvadrat inskriven. Av kvadratens hörn falla två på den ena av de lika sidorna, det ena i dess mittpunkt. Beräkna triangelns vinklar.

Resultat: **1.** 10,72 cm. **2.** 3,257 cm. **3.** $8\frac{5}{8}$ dm². **4.** $x_1 = 1{,}2$; $x_2 = -3\frac{1}{3}$. **5.** 13,5 eller 54. **6.** 45 dm². **7.** $(\pi - \sqrt{2})$; $(\pi + \sqrt{2}) = 0{,}379$. **8.** 36°,87; 71°,57; 71°,57.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. I en rät cirkulär kon är förhållandet mellan mantelytan och basytan = 4. Huru förhåller sig konens volym till volymen av det inskrivna klotet?
2. En person skall genom årliga inbetalningar av 200 kronor under 10 år avbetala ett lån, som löper med 3,5 % årlig ränta. Han föredrager att första gången göra en större inbetalning på

[1] Uppg. i student- och realexamen 1936 finnas i särtryck; se första annonsbladet i detta häfte.

1 000 kronor och de följande nio gångerna betala en och samma mindre summa. Huru stor skall denna vara?

3. Två lika stora liksidiga trianglar med sidan = 10 cm hava ett hörn A gemensamt. Vinkeln mellan deras från A utgående höjder är 45°. Beräkna ytan av den fyrhörning, som utgör triangelarnas gemensamma del.
4. Ekvationerna för en triangels sidor äro

$$x - 2y = -9;\ 4x + 2y = 9;\ 11x - 2y = 141.$$

Sök radien i den inskrivna cirkeln.

5. I en rätvinklig triangel delas hypotenusan av den mot densamma dragna höjden i förhållandet $m : n$. Angiv förhållandet mellan de i deltrianglarna inskrivna cirklarnas ytor som en rationell funktion av m och n.
6. Lös ekvationen

$$10^{-0,4x} = 10^{-0,4a} + 10^{-0,4b}$$

för $a = 5{,}41$ och $b = 6{,}19$.

7. I en geometrisk serie med nio termer är den andra termen = 2 och produkten av alla nio termerna är 1 728. Beräkna seriens summa.
8. Ett klot med radien r skäres av ett plan, så att den mot planet vinkelräta diametern delas i förhållandet 1 : 2. I det därvid uppkommande mindre segmentet skall en cylinder inskrivas med ena basytan i den plana ytan. Bestäm cylinderns höjd och basradie, så att volymen blir så stor som möjligt.
9. I triangeln ABC är $AB = a$, $AC = 2a$ och vinkeln $A = 90°$. Punkten P är belägen inom triangeln så, att vinklarna APB, BPC och CPA äro lika stora. Bestäm längden av PA samt de vinklar, som PA bildar med kateterna.

Resultat: **1.** 25 : 12. **2.** 94,84 kr. **3.** $75\,(\operatorname{tg} 22°{,}5 - \operatorname{tg} 15°) = 75(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3) = 10{,}97$ cm². **4.** $2{,}5\sqrt{5}$ längdenheter. **5.** $\frac{m}{n}$. **6.** 4,979. **7.** $1 : (\sqrt[9]{2{,}25} - \sqrt[9]{1{,}5}) = 20{,}74$. **8.** Höjden $= \frac{2r(\sqrt{7} - 1)}{9}$; radien $= \frac{2r\sqrt{13 - \sqrt{7}}}{9}$. **9.** $PA = 0.397\,a$; vinklarna 50°,10 och 39°,90.

b) *1928 års undervisningsplan.*

Uppgifterna 1—3, 5—7, 9 utgjordes av motsvarande uppgifter a).

4. P är ena ändpunkten av en parameter i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b).$$

Tangenten i P skär x-axeln i A och y-axeln i B. Ellipsens excentricitet är sådan, att $PB = a$. Bevisa, att $PA = b$.

8. I den likbenta triangeln ABC är $AB = AC = s$. På sidan BC uppritas utåt en kvadrat. Sök maximum för triangelns och kvadratens sammanlagda ytor, då vinkeln A varierar.

Resultat: 8. $s^2\left(2 + \frac{\sqrt{17}}{2}\right) = 4{,}062\ s^2$.

Uppgifter i fysik.

1. En partikel roterar i ett horisontalplan omkring en vertikal axel med mycket stor rotationshastighet (»ultracentrifug»). Partikeln gör 55 000 varv per minut, och dess avstånd från rotationsaxeln är 6,5 cm. Beräkna förhållandet mellan den centrifugalkraft, som vid rotationen verkar på partikeln, och partikelns tyngd.
2. Ett homogent klot med radien r meter drages med konstant hastighet rakt uppför ett lutande plan medelst ett vid klotets yta fäst snöre, vilket hålles parallellt med planets längdriktning. Det lutande planet bildar $v°$ med horisontalplanet, och friktionskoefficienten mellan klotet och planet är c. Beräkna avståndet mellan snöret och planet.
3. En elastisk blåsa innehåller nollgradig luft, vars övertryck är 1,98 atmosfärer. I blåsan inpressas en viktsmängd luft, lika stor som den, vilken förut finnes i densamma. Temperaturen stiger därvid till 10° C, och volymen ökas med 25 %. Den omgivande luftens tryck är hela tiden 1,02 atmosfärer. Beräkna det nya övertrycket i blåsan, uttryckt i atmosfärer.
4. Man önskar bestämma brytande vinkeln hos ett optiskt prisma. Prismat ställes på en horisontell, cirkulär skiva, vridbar omkring en genom skivans centrum gående, vertikal axel. Skivans periferi är indelad i grader. Bredvid skivan, tätt intill graderingen, finnes en stillastående, vertikal egg. Med hjälp av två knappnålar siktar man mot den ena av de intill brytande kanten belägna ytorna och inställer skivan så, att spegelbilden av siktanordningen kommer i syftlinjens förlängning. Vid eggen göres då avläsningen 324°,5 på skivan. Skivan vrides därefter så mycket, att spegelbilden i den andra prismaytan kommer i syftlinjen. Motsvarande avläsning är då 84°,0. Beräkna prismats brytande vinkel.
5. En tunn, konvex lins med styrkan 6 dioptrier alstrar på en skärm en bild av ett mycket avlägset föremål. Placerar man omedelbart intill linsen en viss tunn, konkav lins, erhåller man, sedan skärmen förskjutits ett stycke, åter en skarp bild av före-

målet, men bildens lineära storlek är i detta fall tre gånger så stor. Beräkna den konkava linsens styrka i dioptrier.

6. Vid uppmätning av en tunn, rektangelformad metallhinnas tjocklek begagnade man följande optiska metod. Mellan två planslipade, rektangulära glasplattor insköts hinnan ett stycke, så att det uppstod ett kilformigt luftskikt mellan de båda glasplattorna. Dessa berörde fortfarande varandra utefter den ena glasplattans kant *AB*, som var parallell med metallhinnans ena kant *CD*. Den undre glasplattan vilade mot ett horisontellt bord. Rätt uppifrån belystes plattorna med natriumljus, vars våglängd är 0,000589 mm. Då anordningen betraktades uppifrån, iakttogos mörka och ljusa, med kanterna *AB* och *CD* parallella band, vilka alstrades genom interferens mellan ljus, reflekterat vid de båda glasytor, som begränsade det kilformiga luftskiktet. Kanten *CD* sammanföll med mitten av det trettiosjätte ljusa bandet, räknat från kanten *AB*. Beräkna metallhinnans tjocklek.
7. I en strömkrets finnes en vridspolegalvanometer, vilkens motstånd mellan klämskruvarna, *B* och *C*, utgör 4,95 ohm. Till klämskruven *B* kan ett förkopplingsmotstånd *AB* anslutas, och mellan dettas ena ända *A* och galvanometerns andra klämskruv *C* kan en shunt *AC* inkopplas. Därvid delar sig huvudströmmen i två grenar, av vilka den ena passerar genom förkopplingsmotståndet samt galvanometern och den andra genom shunten. Motstånden *AB* och *AC* skola väljas så, att huvudströmmens styrka icke ändras, om de båda motstånden på en gång inkopplas, och vidare så, att strömmen genom galvanometern blir en tiondedel av huvudströmmen. Beräkna motstånden *AB* och *AC*.
8. För att bestämma fasförskjutningen mellan spänning och ström i en av växelström genomfluten induktionsspole av koppartråd, vägande 624 g, hade man nedsänkt den i en värmeisolerad kopparkalorimeter, som vägde 76 g och innehöll 302 g fotogen. Strömstyrkans effektivvärde var 2,00 ampère och effektivvärdet av spänningen mellan spolens ändar 12,8 volt. Man fann, att temperaturen i kalorimetern på 10,0 minuter steg 11°,3 C. Beräkna därav fasförskjutningen. Specifika värmena för koppar och fotogen äro resp. 0,093 och 0,51 gcal pr g och grad. Vikten av isolationsmaterialet i spolen försummas.

Resultat: 1. 219 900. 2. $\frac{r}{1 + c \cot v}$. 3. 3,96 atm. 4. 60°,5. 5. 4 dioptrier. 6. $\frac{71\,\lambda}{4} = 0{,}0104$ mm. 7. *AB* och *AC* äro resp. 44,55 och 5,5 ohm. 8. 47°.8.

En faktoruppdelning av binomet $x^{p-1} - 1 \pmod{p}$.

Av C. A. LEVIN.

Kongruensen

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad (1)$$

där $p = 2m + 1$ är ett primtal, har till rötter talen 1, 2, 3, ..., $(p - 1)$. Genom algebraisk uppdelning i faktorer av vänstra ledet erhållas de båda kongruenserna

$$x^m - 1 \equiv 0 \quad \text{och} \quad x^m + 1 \equiv 0, \qquad (2)\ (3)$$

av vilka den förra har till rötter alla kvadratiska rester r och den senare alla kvadratiska icke-rester $i \pmod{p}$.

Vänstra leden i (2) och (3) kunna ytterligare uppdelas i faktorer; härvid särskiljas två fall, allteftersom p är av formen $p = 4k + 3$ eller av formen $p = 4k + 1$.

Fallet A. $p = 4k + 3$.

Kongruenserna (2) och (3) övergå till

$$x^{2k+1} - 1 \equiv 0, \qquad x^{2k+1} + 1 \equiv 0. \qquad (2)\ (3)$$

Vänstra ledet i (2) kan uppdelas i faktorer, så att (2) motsvaras av de båda kongruenserna

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[\left(1 + \sqrt{-x}\right)^{m+1} - \left(1 - \sqrt{-x}\right)^{m+1}\right] \equiv 0 \qquad (I)$$

och

$$\left(1 + \sqrt{-x}\right)^{m+1} + \left(1 - \sqrt{-x}\right)^{m+1} \equiv 0. \qquad (II)$$

Genom hopmultiplicering av dessa kongruenser erhålles nämligen:

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^{p+1}-(1-\sqrt{-x})^{p+1}\right]\equiv 0,$$

som ger:

$$\binom{p+1}{1}-\binom{p+1}{3}x+\ldots-\binom{p+1}{p}x^{2k+1}\equiv 0.$$

Här äro den första och den sista binomialkoefficienten $\equiv p+1\equiv 1$, de mellanliggande innehålla faktorn p och äro således var för sig $\equiv 0$. Man får därför

$$1-x^{2k+1}\equiv 0.$$

Utföras räkningarna i vänstra leden av (I) och (II), antaga dessa kongruenser formerna

$$\binom{2k+2}{1}+\binom{2k+2}{3}(-x)+\ldots+\binom{2k+2}{2k+1}(-x)^k\equiv 0, \quad \text{(I a)}$$

$$1+\binom{2k+2}{2}(-x)+\ldots+\binom{2k+2}{2k}(-x)^k+$$
$$+(-x)^{k+1}\equiv 0. \quad \text{(II a)}$$

Kongruenserna (Ia) och (IIa) hava tillsammans till rötter samtliga rester (r). De kvadratiska resterna kunna således indelas i två grupper, allt efter som de äro rötter till (Ia) eller (IIa). De förra, till antalet k, kallar jag p-rester (r_p), de senare, till antalet $k+1$, kallar jag v-rester (r_v); deras olika karaktär uppvisas i det följande.

Vänstra ledet i (3) kan uppdelas i tre faktorer, så att (3) motsvaras av de tre kongruenserna

$$(1+\sqrt{-x})^m+(1-\sqrt{-x})^m\equiv 0, \quad \text{(III)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^m-(1-\sqrt{-x})^m\right]\equiv 0, \quad \text{(IV)}$$

$$1+x\equiv 0.$$

Genom hopmultiplicering av dessa kongruenser erhålles nämligen:

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}(1+x)\left[(1+\sqrt{-x})^{p-1}-(1-\sqrt{-x})^{p-1}\right]\equiv 0,$$

som ger:

$$(1+x)\left[\binom{p-1}{1}+\binom{p-1}{3}(-x)+\ldots+\binom{p-1}{p-2}(-x)^{2k}\right]\equiv 0.$$

Alla här förekommande binomialkoefficienter äro $\equiv -1$. Efter teckenbyte får man därför

$$(1+x)(1-x+x^2\ldots+x^{2k})\equiv 0 \text{ eller } 1+x^{2k+1}\equiv 0.$$

Genom utförande av räkningarna i vänstra leden av (III) och (IV) erhållas kongruenserna

$$1+\binom{2k+1}{2}(-x)+\ldots+\binom{2k+1}{2k}(-x)^k\equiv 0, \qquad \text{(III a)}$$

$$\binom{2k+1}{1}+\binom{2k+1}{3}(-x)+\ldots+\binom{2k+1}{2k-1}(-x)^{k-1}+$$
$$+(-x)^k\equiv 0, \qquad \text{(IV a)}$$
$$1+x\equiv 0.$$

Dessa tre kongruenser hava tillsammans till rötter samtliga icke-rester (i). Icke-resterna kunna således indelas i tre grupper. Rötterna till (IIIa), till antalet k, kallar jag p-icke-rester (i_p) och rötterna till (IVa), till antalet k, kallar jag v-icke-rester (i_v), vartill kommer icke-resten -1.

Jag multiplicerar ihop vänstra leden dels i (I) och (III), dels i (II) och (IV). Härigenom erhålles

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^{2m+1}-(1-\sqrt{-x})^{2m+1}\right]\pm$$
$$\pm\frac{1}{\sqrt{-x}}(1+\sqrt{-x})^m(1-\sqrt{-x})^m\left[(1+\sqrt{-x})-(1-\sqrt{-x})\right]\equiv 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(\sqrt{-x})^{2m+1} \pm (1+x)^m \cdot \sqrt{-x}\right] \equiv 0,$$

$$(-1)^m \cdot x^m \pm (1+x)^m \equiv 0. \qquad (4)$$

Av det dubbla tecknet hör det övre till den förra, det nedre till den senare multiplikationen. Eftersom m här är udda, ger det förra

$$x^m - (1+x)^m \equiv 0, \text{ det senare } x^m + (1+x)^m \equiv 0. \quad (5)\ (6)$$

Fallet B. $p = 4k+1$.

Kongruenserna (2) och (3) övergå till

$$x^{2k} - 1 \equiv 0, \qquad x^{2k} + 1 \equiv 0. \qquad (7)\ (8)$$

Vänstra ledet i (7) kan uppdelas i faktorer, så att (7) motsvaras av de tre kongruenserna

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^m - (1-\sqrt{-x})^m\right] \equiv 0, \qquad (V)$$

$$(1+\sqrt{-x})^m + (1-\sqrt{-x})^m \equiv 0, \qquad (VI)$$

$$1 + x \equiv 0,$$

vilket liksom förut verifieras genom hopmultiplicering av vänstra leden.

Utföras räkningarna i vänstra leden, erhållas kongruenserna

$$\binom{2k}{1} + \binom{2k}{3}(-x) + \ldots + \binom{2k}{2k-1}(-x)^{k-1} \equiv 0, \qquad (V\,a)$$

$$1 + \binom{2k}{2}(-x) + \ldots + \binom{2k}{2k-2}(-x)^{k-1} +$$

$$+ (-x)^k \equiv 0, \qquad (VI\,a)$$

$$1 + x \equiv 0.$$

Dessa tre kongruenser hava tillsammans till rötter samtliga kvadratiska rester (r). Resterna kunna således indelas i tre grupper. Rötterna till (Va), till antalet $k-1$, kallar

jag p-rester (r_p) och rötterna till (VIa), till antalet k, kallar jag v-rester (r_v), vartill kommer resten — 1.

Vänstra ledet i (8) kan uppdelas i två faktorer, så att (8) motsvaras av de båda kongruenserna

$$(1+\sqrt{-x})^{m+1}+(1-\sqrt{-x})^{m+1} \equiv 0, \quad \text{(VII)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^{m+1}-(1-\sqrt{-x})^{m+1}\right] \equiv 0, \quad \text{(VIII)}$$

vilket verifieras genom hopmultiplicering av vänstra leden.

Utföras räkningarna i vänstra leden, övergå dessa kongruenser i

$$1+\binom{2k+1}{2}(-x)+\ldots+\binom{2k+1}{2k}(-x)^k \equiv 0 \quad \text{(VII a)}$$

och

$$\binom{2k+1}{1}+\binom{2k+1}{3}(-x)+\ldots+\binom{2k+1}{2k-1}(-x)^{k-1}+$$
$$+(-x)^k \equiv 0. \quad \text{(VIII a)}$$

Kongruenserna (VIIa) och (VIIIa) hava tillsammans till rötter samtliga kvadratiska icke-rester. Icke-resterna kunna således uppdelas i två grupper, allt efter som de äro rötter till (VIIa) eller (VIIIa); rötterna till den förra kongruensen, till antalet k, kallar jag p-icke-rester (i_p), rötterna till den senare, även k till antalet, kallar jag v-icke-rester (i_v).

Kongruenserna (V)—(VIII) överensstämma med resp. (IV), (III), (II), (I). Multiplicerar man (V) och (VI), får man därför (4) med det nedre tecknet. Men då m nu är jämnt, får man kongruensen (5). Likaså ger multiplikationen av (VII) och (VIII) kongruensen (6).

Om vi bortse från $x \equiv -1$, har således kongruensen (5) till rötter samtliga r_p och i_p, vare sig m är udda eller jämnt, och kongruensen (6) har till rötter samtliga r_v och i_v.

Av (5) framgår, att om roten x är en rest, är även följande tal i talserien $x+1$ en rest och att om x är en icke-rest, är även $x+1$ en icke-rest. Vid talet x, som är rot till (5), äger således talserien detta slag av »permanens».

Av (6) framgår, att om x är rot till (6), är det ena av talen x och $x+1$ en rest och det andra en icke-rest. Vid övergång från talet x till $x+1$ äger således en »växling» rum från rest till icke-rest eller tvärtom.

Vilket inflytande har substitutionen $x = \frac{1}{x'}$ på kongruenserna (Ia)—(VIIIa)? Man finner, att (Ia), (IIa), (Va) och (VIa) äro invarianta för denna substitution, varemot (IIIa) och (IVa) övergå i varandra, likasom (VIIa) och (VIIIa). Talgrupperna r_p och r_v äro således invarianta för substitutionen ifråga, under det att talgrupperna i_p och i_v, övergå i varandra.

Vilket inflytande har substitutionen $x' = -(x+1)$?

Antag, att x tillhör talgruppen r_p. Talet x är således en rest och $x+1$ är även en rest. Om primtalet p är av formen $4k+3$, är -1 en icke-rest; härav följer, att $-(x+1)$ är en icke-rest och även $-x$ en icke-rest. Talet $-(x+1)$ tillhör således gruppen i_p. Om däremot $p = 4k+1$, är -1 en rest, varav följer, att $-x$ och $-(x+1)$ äro rester; talet $-(x+1)$ tillhör då gruppen r_p. På samma sätt visas, att om talet x tillhör gruppen i_p, så tillhör talet $-(x+1)$ gruppen r_p eller i_p, allt efter som $p = 4k+3$ eller $p = 4k+1$.

Genom substitutionen $x' = -(x+1)$ övergår således gruppen r_p i gruppen i_p och omvänt gruppen i_p i gruppen r_p, om $p = 4k+3$, varemot grupperna r_p och i_p bli invarianta, om $p = 4k+1$. För denna substitution övergår således kongruensen (Ia) i (IIIa) och omvänt, men (Va) och (VIIa) bli invarianter.

Antag, att talet x tillhör gruppen r_v. Då är således x en rest, men $x+1$ en icke-rest. För $p = 4k+3$ är -1 en icke-rest, och $-(x+1)$ blir en rest och $-x$ en icke-rest; talet $-(x+1)$ tillhör således gruppen r_v. För $p = 4k+1$ är -1 en rest, och $-(x+1)$ blir en icke-rest och $-x$ en rest; talet $-(x+1)$ tillhör då gruppen i_v. På samma

sätt visas, att om x tillhör gruppen i_v, så tillhör talet $-(x+1)$ gruppen i_v eller gruppen r_v, allt efter som $p = 4k+3$ eller $4k+1$. Talen r_v äro rötterna till kongruensen (IIa) eller (VIa) och talen i_v rötterna till kongruensen (IVa) eller (VIIIa). För substitutionen $x = -(x+1)$ äro således (IIa) och (IVa) invarianter, men (VIa) och (VIIIa) övergå i varandra.

En fråga som lätt besvaras genom användande av de funna kongruenserna är följande. För vilka primtal är talet 2 rest?

Talet 1 är alltid rest; kan man avgöra, om 1 tillhör gruppen r_p eller gruppen r_v, vet man på samma gång, om 2 är rest eller icke-rest.

Kongruenserna (Ia) och (Va) med rötterna r_p och kongruenserna (IIa) och (VIa) med rötterna r_v äro invarianta för substitutionen $x' = \frac{1}{x}$; rötterna till dessa kongruenser uppträda således i allmänhet parvis, det enda undantaget är roten $x = 1$, som genom denna substitution övergår i sig själv. Denna rot måste således tillhöra den av de nämnda kongruenserna, som är av udda gradtal.

Kongruensen (Ia) är av graden k, (IIa) av graden $k+1$. Om $k = 2h$ (d. v. s. $p = 8h+3$), är 1 således rot till (IIa), d. v. s. 1 tillhör gruppen r_v och 2 är således icke-rest.

Om $k = 2h+1$ (d. v. s. $p = 8h+7$), är 1 rot till (Ia), d. v. s. 1 tillhör gruppen r_p och 2 är rest.

Om $p = 8h+1$, är (Va) av graden $2h-1$ och (VIa) av graden $2h$. Då är 1 rot till (Va) och tillhör gruppen r_p, varför 2 är rest. Om slutligen $p = 8h+5$, är (Va) av graden $2h$ och (VIa) av graden $2h+1$. Då är 1 rot till (VIa) och tillhör gruppen r_v, varför 2 är icke-rest.

Talet 2 är således kvadratisk rest till primtal av formen $8h \pm 1$ samt icke-rest till primtal av formen $8h \pm 3$.

Kongruensen (I) kan ytterligare uppdelas nämligen i de båda kongruenserna

$$(1+\sqrt{-x})^{k+1}+(1-\sqrt{-x})^{k+1} \equiv 0,$$

och

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\left[(1+\sqrt{-x})^{k+1}-(1-\sqrt{-x})^{k+1}\right] \equiv 0.$$

Genom utförande av räkningarna i vänstra leden erhålles:

1) om $k = 2h$, d. v. s. $p = 8h + 3$,

$$1+\binom{2h+1}{2}(-x)+\binom{2h+1}{4}(-x)^2+\ldots+\binom{2h+1}{2h}(-x)^h \equiv 0$$

och

$$\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{3}(-x)+\ldots+(-x)^h \equiv 0,$$

2) och om $k = 2h + 1$, d. v. s. $p = 8h + 7$,

$$1+\binom{2h+2}{2}(-x)+\binom{2h+2}{4}(-x)^2+\ldots+(-x)^{h+1} \equiv 0$$

och

$$\binom{2h+2}{1}+\binom{2h+2}{3}(-x)+\ldots+\binom{2h+2}{2h+1}(-x)^h \equiv 0.$$

På liknande sätt kan även (Va) uppdelas i två kongruenser.

Ex. 1. $p = 11 = 4 \cdot 2 + 3$,

$$k = 2, \quad 2k + 2 = 6, \quad 2k + 1 = 5.$$

Binomialkoefficienterna för exponenterna 6 och 5 äro resp.

$$1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1 \equiv 1,\ 6,\ 4,\ 9,\ 4,\ 6,\ 1$$

och

$$1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1.$$

I följande rad äro resterna utmärkta med + och icke-resterna med —

+	—	+	+	+	—	—	—	+	—
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Grupperna äro

$$r_p = 3,\ 4;\quad r_v = 1,\ 5,\ 9;\quad i_p = 6,\ 7;\quad i_v = 2,\ 8.$$

Kongruenserna (Ia) —(IVa) med resp. rötter r_p, r_v, i_p och i_v bliva

$$\begin{aligned} 6 - 9x + 6x^2 &\equiv 0, \\ 1 - 4x + 4x^2 - x^3 &\equiv 0, \\ 1 - 10x + 5x^2 &\equiv 0, \\ 5 - 10x + x^2 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ex. 2. $p = 13 = 4 \cdot 3 + 1,$

$$k = 3,\quad 2k = 6,\quad 2k + 1 = 7.$$

Binomialkoefficienterna för exponenten 6:

$$1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1 \equiv 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 2,\ 6,\ 1$$

och för exponenten 7:

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1 \equiv 1,\ 7,\ 8,\ 9,\ 9,\ 8,\ 7,\ 1.$$

Rester och icke-rester:

+	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12.

Grupper: $r_p = 3,\ 9;\quad r_v = 1,\ 4,\ 10;$
$i_p = 5,\ 6,\ 7;\quad i_v = 2,\ 8,\ 11.$

Kongruenserna (Va)—(VIIIa) med rötterna r_p, r_v, i_p och i_v bliva:

$$\begin{aligned} 6 - 7x + 6x^2 &\equiv 0,\quad 1 - 2x + 2x^2 - x^3 \equiv 0. \\ 1 - 8x + 9x^2 - 7x^3 &\equiv 0,\quad 7 - 9x + 8x^2 - x^3 \equiv 0. \end{aligned}$$

Några iakttagelser rörande pytagoreiska trianglar.[1]

Av NAT. BECKMAN.

Under mitt sysslande med pytagoreiska trianglar, som sammanställts till heltalstrianglar, har jag ofta stött på det fallet, att en faktor under rotmärket i Herons formel antagit värdet 1 och en annan visat sig bli en jämn kvadrat. Då detta naturligtvis i hög grad underlättar deras beräkning (i huvudet), har jag ansett det vara av intresse att söka utreda, om en generell formel för finnande av sådana trianglar kunde utfinnas. Till en början inskränker jag mig till det första villkoret och uppställer:

Problem 7: Att finna heltalstrianglar, vid vilkas beräkning en faktor under rotmärket i Herons formel får värdet 1.

Det är utan vidare klart, att om vi bortse från kravet, att trianglarna skola vara heltalstrianglar, så far man värdet 1, om en sida, t. ex. b, är de andras summa minskad med 2, alltså sidorna a, $a + c - 2$, c. Då vidare möjlighet finnes, att triangeln vunnits genom division med en för alla sidor gemensam faktor, få vi välja sidorna: na, $n(a + c - 2)$, nc.

På förut uppvisat sätt utgå vi från en höjd $2xyz$, som om vi till en början räkna med plustriangeln, ger följande värden:

$$na = x^2y^2 + z^2; \qquad nc = x^2z^2 + y^2,$$
$$nb = x^2y^2 + x^2z^2 - y^2 - z^2 = (x^2 - 1)(y^2 + z^2).$$

Vi antaga här, att vi valt bokstäverna så, att b betecknar den bas, som korresponderar med höjden $2xyz$, varjämte

[1] Jfr denna tidskr. årg. *16*, sid. 211 ff., årg. *17*, sid. 200 ff.

y och z, resp. a och c, som kunna godtyckligt byta plats, valts så, att $y \geqq z$, resp. $a \geqq c$. Vidare förutsättes, att y och z äro sinsemellan primtal, medan intet hindrar, att x kan ha en faktor gemensam med endera, icke ens att det har en faktor gemensam med y och en annan med z. Faktorerna under rotmärket bli:

$$\begin{aligned} n \,.\, p &= x^2y^2 + x^2z^2 = x^2(y^2 + z^2), \\ n(p - a) &= x^2z^2 - z^2 \quad = z^2\,(x^2 - 1), \\ n(p - b) &= y^2 + z^2, \\ n(p - c) &= x^2y^2 - y^2 \quad = y^2\,(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Härav synes, att om $n = y^2 + z^2$, så ger en division med denna faktor $p = x^2$, $p - b = 1$. Båda de i inledningen nämnda önskemålen äro sålunda tillgodosedda, men villkoret för att den funna triangeln skall bli en heltalstriangel är uppenbarligen, att $(y^2 + z^2)$ är faktor i $(x^2 - 1)$.

Det är här vanligen bekvämast att börja med n-värdena och söka därmed korresponderande värden på x.

Om n är ett primtal eller produkten av 2 och ett primtal, blir $x^2 - 1$ delbart med n endast för x-värdena $nt \pm 1$. Om däremot n innehåller flere udda faktorer, erhållas även andra lösningar; för t. ex. $y = 7$, $z = 4$, $n = 65$ erhålles $x = 14$, 51, 64, 66 . . . Om speciellt $y = z = 1$, $n = 2$, kan x vara vilket udda tal som helst. Man får då en serie likbenta trianglar, där höjden $= x$, basen $= x^2 - 1$ och sidan $= \frac{1}{2}\,(x^2 + 1)$. Här följer en tabell över trianglar, erhållna för de närmast följande värdena på y och z.

Plustrianglar.

y	z	n	x	a	b	c	p
2	1	5	4	13	15	4	16
			6	29	35	8	36
			9	65	80	17	81
			11	97	120	25	121
			14	157	195	40	196
			16	205	255	52	256

y	z	n	x	a	b	c	p
2	1	5	19	289	360	73	361
			21	353	440	89	441
3	1	10	9	73	80	9	81
			11	109	120	13	121
			19	325	360	37	361
			21	397	440	45	441
3	2	13	12	100	143	45	144
			14	136	195	61	196

Vi övergå till det andra huvudfallet, minustriangeln. Sidorna bli här:

$$na = x^2y^2 + z^2; \qquad nc = x^2z^2 + y^2,$$
$$nb = x^2y^2 - z^2 - x^2z^2 + y^2 = (x^2 + 1)(y^2 - z^2),$$

och faktorerna under rotmärket:

$$np = y^2(x^2 + 1); \quad n(p - b) = z^2(x^2 + 1),$$
$$n(p - a) = y^2 - z^2; \quad n(p - c) = x^2(y^2 - z^2).$$

Om vi välja $y > z$, blir a den största sidan.[1] Vi måste därför här söka få $p - a = 1$. Då måste x väljas så, att $x^2 + 1$ innehåller faktorn $n = y^2 - z^2$. Detta är möjligt, endast om alla udda faktorer i n ha formen $4m + 1$ och n innehåller högst en faktor 2. [Se WAHLGREN, Om heltalstrianglar, årg. *17*, sid. 7.] Den senare möjligheten bortfaller. Ty om $y^2 - z^2$ är jämnt, är det delbart med 4. Ej heller kan y vara jämnt och z udda, ty då får n formen $4k - 1$, och dess faktorer kunna ej alla ha formen $4m + 1$. De minsta värdena äro således $y = 3$, $z = 2$, $n = 5$. Då bli sidorna $9x^2 + 4$, $5(x^2 + 1)$ och $4x^2 + 9$. Man ser här vid

[1] Även vid en plustriangel kan a vara den största sidan. Men detta fall kan ej ge någon lösning till vårt problem. Ty eftersom z ej kan vara faktor till $y^2 + z^2$, skulle fordras, att $z = 1$ och att $x^2 - 1 = n$ vore faktor till $y^2 + 1$. Men för udda x får $x^2 - 1$ faktorn 4, medan ett jämnt tal $y^2 + 1$ har formen $4k + 2$, och för jämna x får $x^2 - 1$ formen $4k - 1$, medan alla faktorer i $y^2 + 1$ ha formen $4k + 1$.

första ögonkastet, att 5 kan utdivideras, om x^2 är ett tal, som slutar på 4 eller 9. Talet x slutar då på 2, 8, 3 eller 7; det har således formen $5t \pm 2$.

Men i detta fall kommer man vanligen lättast till målet genom att börja med x-värdena. Mot varje kombination av två udda faktorer r och s i talet $x^2 + 1$ (den ena kan vara $= 1$) svarar en lösning $n = rs$, $y = \frac{1}{2}(r + s)$, $z = \frac{1}{2}(r - s)$. Visserligen äro tal av formen $x^2 + 1$ synnerligen ofta primtal (5, 17, 37) eller produkten av 2 och ett primtal (10, 26, 82, 122), varvid n-värdena snart bli stora tal. Men t. ex. x-värdet 7 ger n-värdena 5 och 25, x-värdet 8 ger 5, 13 och 65, x-värdet 13 ger 5, 17 och 85 o. s. v.

En blick på de värden, som antagits av sidorna i vår allmänna minustriangel, visar omedelbart, att om $y^2 - z^2 = x^2 + 1 = n$, kommer efter divisionen en faktor $p - a$ att bli $= 1$ samt alla de övriga jämna kvadrater. Om åter $y^2 - z^2 = n$, $x^2 + 1 = nn_1$, blir $p = n_1 y^2$, $p - a = 1$, $p - b = n_1 z^2$ och $p - c = x^2$. Även här bli båda de i inledningen berörda önskemålen tillgodosedda.

Vad som tidigare av oss kallats multipeltrianglar, är här redan behandlat så till vida, som om t. ex. faktorn f är gemensam för x och y, så kommer f^2 att bli gemensam faktor för samtliga sidor i den ena deltriangeln. Trianglar, som innehålla en gemensam faktor, vilken icke är jämn kvadrat, kunde också tänkas ge lösningar av det slag, vi här diskuterat. Men vi få i detta fall icke så enkla formler som tidigare. Jag skall blott ge ett par exempel. En enda rätvinklig triangel har en faktor $= 1$ under rotmärket, nämligen 3, 4, 5. Men här ha vi icke någon annan jämn kvadrat. Dess multipeltrianglar 12, 9, 15 och 12, 16, 20 kunna hopställas åt motsatta håll. Vi få då 15, 20, 25, vilket vid division med 5 ger oss 3, 4, 5 tillbaka. Sättas de åt samma håll, få vi minustriangeln 7, 15, 20. Denna ger $A = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1}$, alltså en faktor $= 1$ men ingen annan jämn kvadrat.

Triangeln 3, 4, 5, kan betraktas såsom specialfall av en grupp, vars höjd är $4x$, motsvarande bas $2x^2 + 1$ och övriga

sidor $2x^2 + 2$ och $4x^2 + 1$ (9, 10, 17; 19, 20, 37; 33, 34, 65; 51, 52, 101 o. s. v.).

Vi sammanställa till sist en tabell över lätthanterliga minustrianglar, funna på nu behandlade väg. Här är

$$y^2 - z^2 = n,\ b = x^2 + 1,\ p - c = x^2,$$
$$p = a + 1,\ p - b = c - 1.$$

Minustrianglar.

x	n	y	z	a	b	c	$p - c$
2	5	3	2	8	5	5	4
3	5	3	2	17	10	9	9
4	17	9	8	80	17	65	16
5	13	7	6	97	26	73	25
7	5	3	2	89	50	41	49
7	25	13	12	337	50	289	49
8	5	3	2	116	65	53	64
8	13	7	6	244	65	181	64
13	5	3	2	305	170	137	169
13	17	9	8	809	170	641	169
13	85	11	6	241	170	73	169
18	65	9	4	404	325	81	324
21	221	15	2	449	442	9	441

Beräkning av ytor och volymer.

Av **STIG COMÉT.**

Ursprungliga anledningen till denna uppsats är, att jag för några år sedan sökte efter en i möjligaste mån elementär metod att härleda Simpson's regel. Kännedom om denna regel föreskrives nämligen i de kursplaner, jag då hade att följa. Däremot fordras ej differentialkalkyl. Som grundval kunde endast läggas grafisk framställning av enkla funktioner (polynom).

Den metod, som beskrives nedan i mom. **1** och **2**, gavs vid undervisningen ej i denna generella form utan endast i sitt enklaste, icke triviala fall (»fallet $k = 2$»). — I mom. **3**—**6** visas sedan den lärogång, som i huvudsak följdes fram till Simpson's regel.

I detta sammanhang må frågas, om ej Simpson's regel vore något för läroverken? Den i regel approximativa beräkning av plana ytor, som den möjliggör, är kanske ej så nödvändig, även om den i praktiken som bekant är högst värdefull. Regelns stora företräden visa sig emellertid vid volymsberäkningar: Den ensam (och t. o. m. i sin enklaste form) ersätter samtliga volymsformler i elementär stereometri och ger dessutom i flera fall exakta värden på volymen. Och, som senare skall visas, den kan härledas synnerligen elementärt.

1. Ekvationen för en plan kurva i ett rätvinkligt koordinatsystem är

$$y = cx^k, \tag{1}$$

där c och k äro > 0 (se fig. 1). Sök storleken av den yta, S, som begränsas av en båge på kurvan — mellan punk-

terna $(a_1; b_1)$ och $(a_2; b_2)$ — samt bågens projektion på x-axeln; a_1 och a_2 antagas ha samma tecken. S' betecknar den yta, som begränsas av samma kurvbåge och dess projektion på y-axeln.

Kurvbågen indelas i små delar medelst punkter, genom vilka normaler dragas mot axlarna. Därigenom bli S och S' uppdelade i smala strimlor, vilka kunna anses som parallelltrapets (eller, om man så vill, rektanglar). Om ett par strimlor kallas s resp. s', båda svarande mot samma delningspunkter, $(x_1; y_1)$ och $(x_2; y_2)$, erhålles förhållandet mellan dem:

$$\frac{s'}{s} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot c(x_2^k - x_1^k)}{c(x_1^k + x_2^k) \cdot (x_2 - x_1)}. \tag{2}$$

Om k är ett heltal, kan man förkorta med $(x_2 - x_1)$ och får

$$\frac{s'}{s} = \frac{(x_1 + x_2)(x_2^{k-1} + x_2^{k-2} \cdot x_1 + \ldots + x_1^{k-1})}{x_1^k + x_2^k}.$$

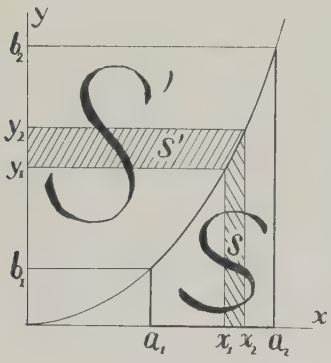


Fig. 1.

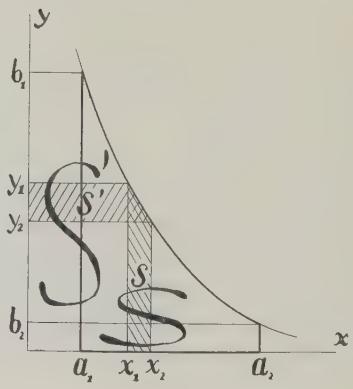


Fig. 2.

Väljas delningspunkterna tillräckligt tätt, d. v. s. om x_2 närmar sig x_1, kommer detta uttryck att närma sig

$$\frac{s'}{s} = \frac{2x_1 \cdot kx_1^{k-1}}{2x_1^k} = k,$$

som är en konstant. Härav följer, att även

$$S' = k \,.\, S, \tag{3}$$

ty varje strimla av S' är ju $= k$ ggr motsvarande strimla av S.[1] Dessutom är

$$S + S' = a_2 b_2 - a_1 b_1. \tag{4}$$

Av (3) och (4) följer:

$$S = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{k+1} \text{ eller enl. (1): } S = c\,\frac{a_2^{k+1} - a_1^{k+1}}{k+1}. \quad (5)\ (5')$$

Om k är ett negativt heltal. $k = -m$, $k \neq -1$, (se fig. 2), blir

$$\frac{s'}{s} = \frac{(x_1 + x_2) \,.\, c(x_1^{-m} - x_2^{-m})}{c(x_1^{-m} + x_2^{-m}) \,.\, (x_2 - x_1)}.$$

Efter förlängning med $x_1^m \,.\, x_2^m$, förkortning med $(x_2 - x_1)$ och gränsövergång erhålles

$$\frac{s'}{s} = m; \quad \therefore S' = m \,.\, S.$$

Nu är

$$S + a_1 b_1 = S' + a_2 b_2, \text{ varav } S = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{1 - m}.$$

Detta är samma formel som (5), ty $-m = k$.

Om allmännare k *är ett rationellt tal,* $k = p : q$, där p och q äro heltal, förlänges bråket (2) med en sådan faktor, att $(x_2^k - x_1^k)$ blir utbytt mot $(x_2^p - x_1^p)$; man förlänger således med

$$x_2^{p-k} + x_2^{p-2k} \,.\, x_1^k + x_2^{p-3k} \,.\, x_1^{2k} + \ldots + x_2^k \,.\, x_1^{p-2k} + x_1^{p-k},$$

[1] Exaktare, t. ex.: Om delningspunkterna tagas tillräckligt tätt, finns det ett ε, så att för varje par av strimlor $s' : s$ ligger mellan $k - \varepsilon$ och $k + \varepsilon$. $\therefore ks - \varepsilon s < s' < ks + \varepsilon s$.

$$\therefore k \,.\, \Sigma s - \varepsilon \,.\, \Sigma s < \Sigma s' < k \,.\, \Sigma s + \varepsilon \,.\, \Sigma s$$
$$\therefore kS - \varepsilon S < S' < kS + \varepsilon S.$$

Emedas εS blir godtyckligt litet med ε, måste alltså $S' = k \,.\, S$.

vilket uttryck består av q st. termer (emedan $p = q \cdot k$). Emedan p är heltal, kan därefter bråket förkortas med $(x_2 - x_1)$, så att

$$\frac{s'}{s} = \frac{(x_1 + x_2)(x_2^{p-1} + x_2^{p-2} \cdot x_1 + \ldots + x_1^{p-1})}{(x_1^k + x_2^k)(x_2^{p-k} + x_2^{p-2k} \cdot x_1^k + \ldots + x_1^{p-k})}.$$

Efter gränsövergång blir (täljarens andra parentes innehåller p st. termer, nämnarens q st.):

$$\frac{s'}{s} = \frac{2x_1 \cdot px_1^{p-1}}{2x_1^k \cdot qx_1^{p-k}} = \frac{p}{q} = k.$$

Härav följer, att (3), (5) och (5′) gälla, även då k är ett godtyckligt rationellt tal ($\neq -1$).

2. Vi antaga att en kropp har sådan form, att om den skäres av parallella plan med variabelt avstånd (x) från en fix punkt, snittytans storlek (y) bestämmes av sambandet

$$y = cx^k.^1 \qquad (6)$$

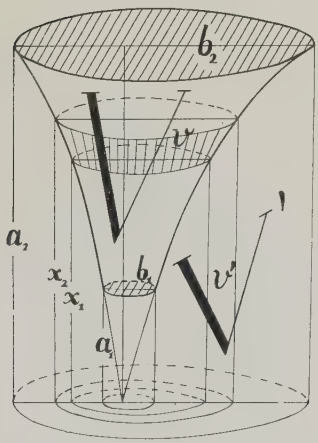


Fig. 3.

Sök volymen (V) mellan två snittytor, b_1 och b_2, svarande mot $x = a_1$ resp. $x = a_2$ (se fig. 3).

Konstruera två cylindrar med basytorna b_1 resp. b_2 och höjderna a_1 resp. a_2. Volymen av det *mellan* cylindrarna men *utanför* kroppen liggande området kallas V'.

Medelst täta snitt delas V i tunna *skivor*. Genom snittlinjerna läggas cylindermantlar,[2] som uppdela V' i tunna *rör*. Om volymen av en skiva är v, av

[1] Exempel: »Kil» (d. v. s. tresidigt prisma med snitt // en sidokant) och paraboloid: $k = 1$; pyramid och kon: $k = 2$.

[2] Det antages, att dessa icke skära varandra — vilket enligt Cavalieris princip ej betyder någon inskränkning.

motsvarande rör v', båda svarande mot snitten $x = x_1$ och $x = x_2$, så blir

$$\frac{v'}{v} = \frac{x_1 \cdot c(x_2^k - x_1^k)}{cx_1^k \cdot (x_2 - x_1)}.$$

Gränsövergången göres här liksom i mom. **1**. Resultatet blir slutligen, helt analogt:

$$V = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{k+1} \text{ eller, enl. (6): } V = c\,\frac{a_2^{k+1} - a_1^{k+1}}{k+1}. \quad (7)\ (7')$$

3. Den yta (se fig. 4), som begränsas av en båge på parabeln $y = cx^2$ och dess projektion på x-axeln, är enligt (5'):

$$S = c\,\frac{a_2^3 - a_1^3}{3}.$$

Detta kan skrivas:

$$S = \frac{c}{3}(a_2 - a_1)(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) = \frac{c}{6}(a_2 - a_1)(2a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_2^2) =$$

$$= \frac{c}{6}(a_2 - a_1)\left[a_1^2 + (a_1 + a_2)^2 + a_2^2\right].$$

Om här införas:

$$\frac{a_2 - a_1}{2} = h;\ \frac{a_1 + a_2}{2} = a_m;\ c \cdot a_m^2 = b_m,$$

blir

$$S = \frac{c}{3}h(a_1^2 + 4a_m^2 + a_2^2)$$

eller

$$S = \frac{h}{3}(b_1 + 4b_m + b_2). \quad (8)$$

Detta uttryck på ifrågavarande yta är Simpson's regel i dennas enklaste form (»prismoidformeln»).[1] Den ger det exakta värdet på motsvarande yta, även om parabelns

[1] Jmf. S. NYDELL, Prismoidformeln, denna tidskr. årg. *16*, sid. 209.

vertex ej ligger i origo (alltså om kurvans ekvation är $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$). Kalla nämligen (se fig. 5) vertex' höjd över x-axeln för H. Den yta (av storleken $S - 2hH$), som begränsas av parabelbågen och dess projektion på vertextangenten, kan enligt det nyss utförda beviset beräknas enligt (8), d. v. s.

$$S - 2hH = \frac{h}{3}[(b_1 - H) + 4(b_m - H) + (b_2 - H)],$$

vilket omedelbart ger

$$S = \frac{h}{3}(b_1 + 4b_m + b_2).$$

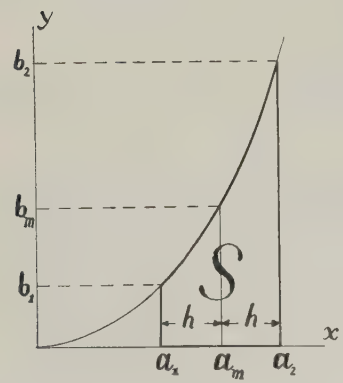


Fig. 4.

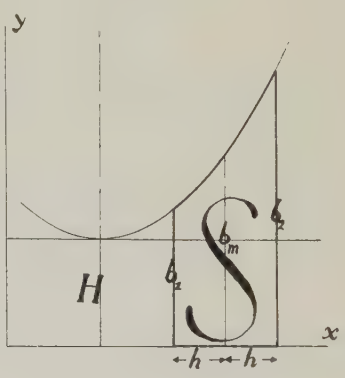


Fig. 5.

4. Sök ytan, S, mellan en godtycklig kurvbåge och dess projektion på en rät linje (kallad x-axeln).

Kurvbågens projektion delas i ett antal lika delar (vardera betecknas med $2h$). Genom delningspunkterna dragas normaler mot x-axeln (»ordinator»), tills de skära kurvan; deras längd är b_0, b_2, b_4, . . ., b_n (n = jämnt tal). S blir då uppdelad i delarna S_1, S_2, S_3, . . . Vore nu kurvbågen, som begränsar S_1, en parabel, kunde S_1 beräknas exakt enligt (8), om ordinatan b_1 drages mitt emellan b_0 och b_2. Är i varje fall blott kurvbågen ej alltför egendomlig, bör man kunna uppleta en parabelbåge, som på detta korta stycke

ej alltför mycket avviker från kurvan. Formel (8) bör alltså ge ett approximativt riktigt värde på S_1, och i regel ett mycket gott. Likaså för S_2, S_3, ..., om man blott även drar ordinatorna b_3, b_5, ... För S fås genom addition av uttrycken för S_1, S_2, S_3, ...:

$$S = \frac{h}{3}(b_0 + 4b_1 + b_2) + \frac{h}{3}(b_2 + 4b_3 + b_4) + \ldots +$$

$$+ \frac{h}{3}(b_{n-4} + 4b_{n-3} + b_{n-2}) + \frac{h}{3}(b_{n-2} + 4b_{n-1} + b_n)$$

eller

$$S = \frac{h}{3}(b_0 + 4b_1 + 2b_2 + 4b_3 + 2b_4 + \ldots +$$

$$+ 2b_{n-2} + 4b_{n-1} + b_n),$$

vilket är Simpson's regel.

5. Om en pyramid (kon) skäres av parallella plan med variabelt avstånd (x) från spetsen, blir snittytans storlek $y = cx^2$, där c = ytans storlek på avståndet $x = 1$. Enligt (7′) är volymen, V, av den del av pyramiden, som ligger mellan snittytorna b_1 och b_2 (avstånd från spetsen = a_1 resp. a_2):

$$V = c\,\frac{a_2^3 - a_1^3}{3}.$$

Detta uttryck är identiskt med uttrycket på S i mom. **3** och kan omformas på samma sätt. Resultatet blir

$$V = \frac{h}{3}(b_1 + 4b_m + b_2), \qquad (9)$$

där $h = \frac{a_2 - a_1}{2}$ och b_m = storleken av den snittyta, som ligger mitt emellan b_1 och b_2.

Formel (9) ger exakt resultat ej blott för pyramider. För ett prisma (cylinder) med basytan = B och höjden = $2h$ ger den:

$$V = \frac{h}{3}(B + 4B + B) = 2hB,$$

och för en kil med rektangulära basytan $= B$ och höjden mot denna $= 2h$:

$$V = \frac{h}{3}\left(B + 4 \cdot \frac{B}{2} + 0\right) = hB,$$

i båda fallen exakt resultat. Och ännu allmännare: Ett föremål skäres med parallella plan på avståndet x från en fix punkt. Snittytan är en andragradsfunktion av x:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2. \tag{10}$$

Sök volymen mellan snitten b_1 och b_2.

Lägg föremålet samt ett prisma, en kil och en pyramid mellan två parallella plan; de tre sistnämnda skola med ett plan på avståndet $x = 1$ ge snittytor av storleken c_0, c_1 och c_2 resp. För ett godtyckligt avstånd x kallas deras snittytor y', y'' och y''' resp. Tydligen är för varje x:

$$y = y' + y'' + y''',$$

och enligt en något »utvidgad» Cavalieris princip är alltså föremålets volym = summan av prismats, kilens och pyramidens. Men dessas volymer beräknas var för sig enligt (9), och med lätt insedda beteckningar blir

$$V = \frac{h}{3}(b_1' + 4b_m' + b_2') + \frac{h}{3}(b_1'' + 4b_m'' + b_2'') + \frac{h}{3}(b_1''' + 4b_m''' + b_2''') =$$

$$= \frac{h}{3}\left[(b_1' + b_1'' + b_1''') + 4(b_m' + b_m'' + b_m''') + (b_2' + b_2'' + b_2''')\right] =$$

$$= \frac{h}{3}(b_1 + 4b_m + b_2).$$

Resonemanget ger naturligtvis samma resultat, om det i uttrycket (10) står minustecken framför någon term.

Formel (9) ger alltså exakt resultat för varje föremål, vars »tvärsnitt är en andragradsfunktion av x». För andra föremål ger den approximativa värden på V, som ofta äro praktiskt användbara (ex. volymen av en tunna); fordras

högre noggrannhet, är det ju lätt att liksom i mom. **4** härleda Simpson's regel.

6. Som tillämpning beräkna vi sfärens volym. Om radien är R och x räknas med medelpunkten som utgångspunkt, är sfärens tvärsnitt $y = \pi(R^2 - x^2)$, d. v. s. av andra graden i x. Alltså kommer (9) att ge exakt resultat. — Lägg två parallella tangentplan till sfären och ett därmed parallellt diametralplan. Då är $h = R$, $b_1 = b_2 = 0$, $b_m = \pi R^2$ och

$$V = \frac{R}{3}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Nästan lika lätt erhålles volymen av ett sfäriskt segment (med höjden $= H$). Lägg ett tangentplan parallellt med segmentets plana yta samt ett plan mitt emellan dessa. Då blir $h = \frac{H}{2}$, $b_1 = 0$, $b_m = \pi\left(RH - \frac{H^2}{4}\right)$ och $b_2 = \pi(2RH - H^2)$, varav

$$V = \frac{H}{6}\left[0 + 4\pi\left(RH - \frac{H^2}{4}\right) + \pi(2RH - H^2)\right] = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H).$$

Slutligen må anmärkas, att även ellipsoider och hyperboloider ge snittytor av andra graden i x, om snittplanen läggas vinkelrätt mot huvudaxlarna. Även i dessa fall bli uträkningarna lätta.

Enkel konstruktion av längden på en hyperbels konjugataxel.

Den i tidskriftens marshäfte innevarande år meddelade konstruktionen av en hyperbels konjugataxel finnes angiven i Nyström-Olson, Funktionslära och Analytisk geometri, ex. 562. *Hj. Olson.*

En enkel televisionssändare och mottagare.

Av **STIG LINDHOLM.**

Medelst radiovågor kunna såväl stillastående som rörliga bilder överföras. För utsändning av rörliga bilder, television, finnas ett flertal olika system. Den apparat, som här skall beskrivas, är avsedd att på ett enkelt och åskådligt sätt klargöra principen för såväl sändning som mottagning av television med hjälp av hålskivor.

Vid television uppdelas den bild, som skall utsändas, i ett antal bildelement, vilka äro så små i förhållande till hela bilden, att ett fullt tydligt helhetsintryck erhålles, då den av bildelementen sammansatta bilden återges på mottagarsidan. De olika bildelementens ljusvärden omvandlas genom en fotocell till elektrisk ström, vilkens styrka kommer att motsvara elementens ljusvärden. Till originalets uppdelning användes enklast en roterande skiva försedd med ett stort antal i spiral placerade hål, en s. k. Nipkows skiva. Den återges schematiskt i fig. 1.

Skivan är försedd med (i detta fall 24 st.) fyrkantiga hål ordnade i spiral och på samma vinkelavstånd från varandra. I radiell led sammanfaller ett utanför liggande hås innerkant med det närmast innanför liggandes ytterkant. Fyrhörningen ABCD markerar originalets plats framför skivan, som sättes i rotation av en elektrisk motor i den riktning pilen utvisar. Då hålen, som förut nämnts, ligga omedelbart innanför varandra, komma de att under ett varv svepa över hela ytan ABCD. Om denna utgöres av en framför skivan placerad, starkt belyst bild, kommer ljuset från denna att slippa fram genom skivans hål i samma följd, som om bilden varit sönderklippt i remsor, vilka hopfogats till ett sammanhängande band, och som får passera framför ett stillastående hål. Bilden, med dess skiftande dagrar och skuggor har förvandlats till en följd av växlande ljus.

I fig. 2 återgivas schematiskt anordningarna för avsändning och mottagning. *L* är en kraftig elektrisk lampa, vars ljus medelst kondensorn *K* koncentreras på fotocellen *F*. Ljusknippet får först passera genom den bild *B*, som skall utsändas, och hålskivan *S*. De ljusvariationer, som träffa fotocellen, förvandlas genom denna till en ström av växlande styrka, vilken förstärkes och sedan antingen genom kabel eller radio sändes vidare till mottagaren. I denna förstärkas de mottagna impulserna på samma sätt som vid vanlig rundradio, men högtalaren är ersatt av en glimlampa

(*G*). Denna kommer att lysa i takt med de från mottagaren kommande strömmarna d. v. s. den flämtar i takt med ljusstrålen, som passerat bilden och hålskivan i sändaren. Mottagaren innehåller vidare en hålskiva (S_1) med exakt samma hålindelning som den vid sändaren. Med hjälp av denna sammansättas glimlampans ljusväxlingar åter till en bild, då de genom hålskivan träffa ögat. Glimlampans lysande elektrod skall vara lika stor som den mottagna bilden.

Om de båda skivorna rotera åt samma håll, med samma hastighet och så, att ljusstrålen i sändaren passerar ett hål i skivan samtidigt som motsvarande hål i skivan S_1 befinner sig framför glimlampan, och dennas elektrod betraktas genom hålskivan, ser man en bild, likadan som den utsända. Ett villkor för god bild-

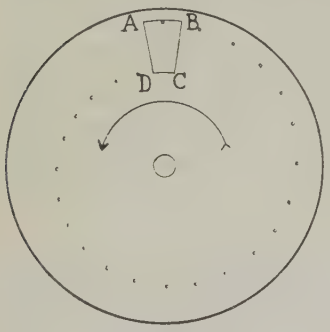


Fig. 1.

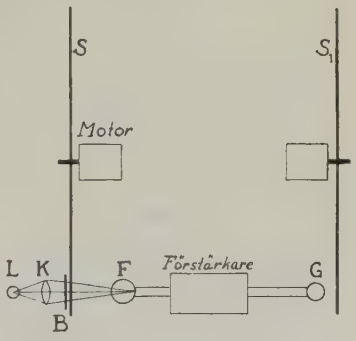


Fig. 2.

kvalitet är att skivorna rotera med exakt samma hastighet och fullt överensstämmande med avseende på hålens läge. De skola rotera synkront och i fas.

Såväl föremål i verkligheten som biograffilmer kunna bli föremål för television. Det senare slaget erbjuder de minsta svårigheterna, varför filmöverföringen fått den största användningen vid televisionssändningar. Filmen frammatas som bekant ryckvis med omkr. 24 bilder i sekunden. Framför filmen roterar en hålskiva med samma varvantal per sek. som antalet bildväxlingar per sek., således 24 varv i sekunden. Varje filmbild står stilla $^1/_{24}$ sekund, och under denna tid hinner hålskivan rotera ett varv och således svepa över bilden. När skivan börjar sitt nästa varv, har en ny filmbild frammatats o. s. v.

Den scen, som skall utsändas, upptages först på vanligt sätt med en filmkamera. Filmen framkallas, fixeras och omvändes (d. v. s.

av den negativa bilden göres en positiv), varefter den får passera framför hålskivan. Därefter tvättas bilden bort från filmen, som sedan förses med nytt ljuskänsligt skikt, torkas och går åter till upptagningskameran. Filmen beskriver således ett kretslopp; tiden för ett sådant är mycket kort, endast någon minut.

I det följande skall lämnas anvisningar för tillverkning av sändare och mottagare för television enligt nu nämnda system.

Hålskivan förfärdigas lämpligen av aluminiumplåt (c:a 1 mm). Dess diameter skall vara 30 cm. Skivans omkrets delas i 24 lika delar. Genom varje delningspunkt drages en diameter. Skivan blir på detta sätt indelad i 24 lika sektorer vardera med en medelpunktsvinkel av 15°. På ett avstånd av 140 mm från medelpunkten borras på en av diametrarna ett hål med 1 mm:s diameter. På nästföljande diameter borras ett likadant hål på 139 mm:s avstånd från medelpunkten o. s. v. Det 24:e hålet skall således ligga på 117 mm:s avstånd från medelpunkten. Två skivor erfordras. För att dessa skola bliva exakt lika, borras de lämpligen på samma gång på så sätt, att de läggas ovanpå varandra under borrningen. När hålen äro färdiga filas de fyrkantiga med tillhjälp av en mycket fin fyrkantfil.

Halskivorna skola, som förut nämnts, rotera synkront och i fas. De böra därför drivas av två synkronmotorer. Ett enklare sätt som man kan tillgripa, då det gäller en demonstrationsapparat, är att fästa dem på samma motoraxel. Motorn bör ha en hastighet av 1000 varv/min.

Lampan *L* (se fig. 2) utgöres av en kraftig glödlampa med koncentrerad glödtråd t. ex. en billampa 25 watt. Kondensorn *K* har en brännvidd av c:a 5 cm. Ljuset från lampan träffar genom denna anordning alltid fotocellen *F* på samma ställe oberoende av hålskivans ställning, vilket är av stor betydelse, då olika delar av cellens ljuskänsliga skikt kunna ha olika känslighet. Fotocellen utgöres lämpligen av en gasfylld caesiumcell.

Impulserna från fotocellen förstärkas med en enkel förstärkare (fig. 3). Denna, som är användbar för en mängd olika försök, består av två elektronrör: I A115, II B109, kopplade till varandra med en transformator.

Förstärkaren är helt nätansluten. Med tillhjälp av drosseln *D* (c:a 5 henry vid 200 mA) och kondensatorn *K* (2 μF) borttagas störningar från nätet. Motståndet *R* avpassas så, att strömstyrkan i glödströmskretsen blir 150 mA. Vid 220 volt nätspänning skall motståndet vara c:a 1330 ohm. Det utgöres lämpligen av kon-

stantantråd, lindad på asbestkordel (1000 ohm per meter). Det första rörets glödström får emellertid icke överstiga 100 mA, varför detta rörs glödtråd försetts med en shunt *Z* (80 ohm), som borttager 50 mA. Spänningsfallet över motståndet *M* (50 ohm) användes till att förse andra rörets galler med en konstant negativ förspänning. Transformatorn *T* har ett omsättningstal av 1:5. Motståndet *A* (10 000 ohm) sänker anodspänningen på första röret till lämpligt värde. Motståndet *E* (2 megohm) kan event. uteläimnas.

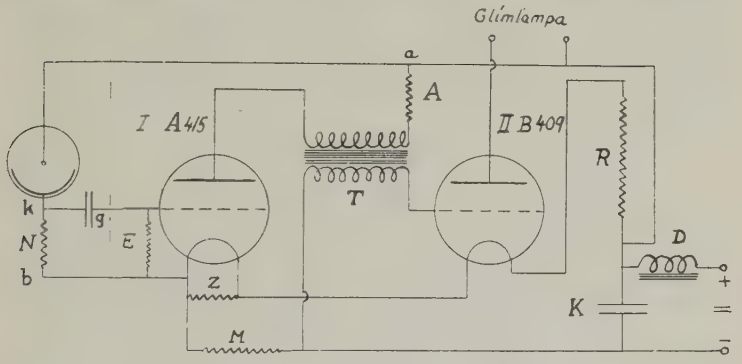


Fig. 3.

Fotocellens katod (*k*) anslutes dels över en kondensator (1000—100 000 cm) till första rörets galler, dels över ett stort motstånd *N* (2—5 megohm) till första rörets glödtråd. Cellens anod anslutes vid *a* i anodkretsen till förstärkarens sista rör. Fotocellens förspänning blir genom denna koppling ungefär densamma som rörets anodspänning. Tål cellen icke denna höga spänning, måste den anslutas med hjälp av en spänningsdelare (se fig. 4.)

Den ström, som fotocellen lämnar, får passera motståndet *N*. Belyses cellen med ljus av växlande styrka, varierar fotoströmmen och därmed också spänningsfallet mellan *k* och *b* i takt med ljuset. Samma spänningsskillnader uppstå mellan *g* och *b* d. v. s. mellan gallret och glödtråden i förstärkarens första rör. Då rörets anodström är beroende av spänningsskillnaden mellan galler och glödtråd, kommer även den att ändras i takt med fotoströmmen. Anodströmsvariationerna överföras medelst en transformator *T* (fig. 3) till gallret i förstärkarens andra rör och förorsaka då motsvarande strömändringar även i detta rörs anodkrets. I serie med denna är emellertid en glimlampa inkopplad. Dennas ljusstyrka kommer att variera i takt med anodströmmen, d. v. s. den återgiver de ljusväxlingar, som träffa fotocellen.

Glimlampan är en vanlig glimlampa med spiralformiga elektroder, avsedd för 110 volts spänning. Det i lampans sockel befintliga motståndet borttages eller kortslutes. För att få diffust ljus omlindas lampan med silkespapper. Den kan inkopplas på flera sätt. Det enklaste är att koppla den direkt i serie med sista rörets anodkrets. Skulle resultatet icke bliva gott, användes istället kopplingen i fig. 5. *Tr* är en vanlig lågfrekvenstransformator (omsättningstal 1:3). Dess primärlindning kopplas i serie med rörets anodkrets. Till sekundärlindningen anslutes glimlampan *G* i serie med en kondesator (c:a 2 μF). Parallellt med kondensatorn kopplas ett batteri (c:a 90 volt) och i serie med detta ett variabelt motstånd på ett par tusen ohm. Batteriets spänning inregleras så, att lampan nätt och jämt tändes.

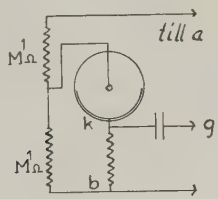


Fig. 4.

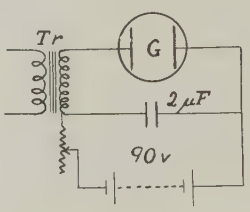


Fig. 5.

Motorn med hålskivorna (förutsatt att endast en motor användes), glödlampan, fotocellen och glimlampan monteras på en gemensam träplatta. Skivorna injusteras så, att då ett hål i sändarens skiva befinner sig mitt framför fotocellen, motsvarande hål i mottagarskivan befinner sig framför glimlampan. Lämpliga bilder för sändning erhållas, om man på glasskivor med tusch målar enkla figurer, siffror eller bokstäver. En sådan glasskiva fastsättes tätt framför det ställe av hålskivan, där ljuset från glödlampan träffar densamma. Glimlampan betraktas sedan genom den andra hålskivan; man ser då en bild likadan som den utsända.

På grund av de stora hålen i skivorna bli de överförda bilderna ganska grova; några finare detaljer kunna icke urskiljas. För att uppnå detta måste man göra hålen mycket små, men hålskivorna bli då mycket svåra att tillverka. För att vara så enkel ger den beskrivna apparaten ett gott resultat. Man får ju inte fordra alltför mycket av den. Den är ju endast avsedd för att på ett enkelt sätt demonstrera en av principerna för television.[1]

[1] Den som ej själv vill tillverka apparaten, kan efter beställning erhålla den från P. A. Norstedt & Söner, Skolavdelningen, Stockholm.

Framställning av ammoniaksoda.

Av **W. EKMAN** och **G. STARCK.**

En av H. RHEINBOLDT[1] beskriven anordning för snabb demonstration av sodaframställning enligt Solvay karakteriseras främst av sättet för kolsyrans införande i den ammoniakaliska koksaltlösningen. För att erhålla en kraftig finfördelning av kolsyran och därigenom snabb och fullständig absorption inledes gasen genom ett Jenaglasfilter. Detta medför nödvändigheten av att begagna en kolsyrabomb, eftersom trycket i en vanlig kolsyraapparat ej räcker till att övervinna motståndet i filterplattan, även om denna är grovporig. Vidare anbringar R. omkring reaktionskärlet en kylmantel med 30°-igt vatten. Tiden för bikarbonatbildningen ur ca. 300 ml NH_3-NaCl-lösning anslås av R. till 20 à 25 minuter.

Vi ha funnit, att man kan förenkla apparaten högst väsentligt utan att resultatet riskeras, i det med vår anordning 50 ml lösning redan efter 5 minuter äro mättade med CO_2 och börja avsätta bikarbonat.

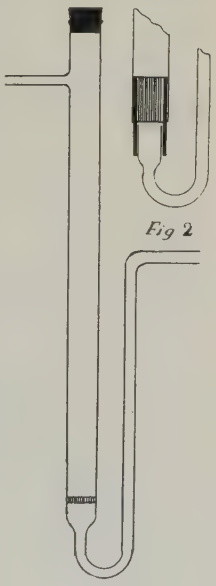


Fig 2

Fig. 1.

Vi hava sammansatt två apparater, en dyrare och en billigare. Den förra (fig. 1) utgöres av en glasfiltertratt, modell 15a (20 · 150 mm), förlängd till ca. 350 mm och med avledningsröret skarvat och omböjt enl. fig. Filterplattans porositet motsvarar beteckningarna G 1 eller G 2, d. v. s. den kan vara den grövsta eller näst grövsta. Upptill är röret tillslutet av en kork eller kautschukpropp; strax inunder är ett ansatsrör med anslutning till vattensugen. Ingen kylning är anordnad. Tratten kostar ungefär 4:50 kr; härtill komma kostnaderna för dess förlängning uppåt och nedåt, varför apparatens tillverkningspris torde närma sig 10 kr.

I den billiga apparaten, som tillverkas av vanligt glas, är glasfiltret ersatt av en kort rottingbit (20 mm i diam., 25 mm lång),

[1] Chemische Unterrichtsversuche, 1934.

fastsatt medelst en kautschukslang inuti ett glasrör med ungefär 4 mm större inre vidd (fig. 2). Rottingens pris kan icke anges ens i ören[1]; för att ytterligare förbilliga apparaten kan man ersätta sidoröret i app. 1 med ett i korken insatt, omböjt rör.

Lösningen utgöres av 4-normal ammoniak, mättad med koksalt (250 g koksalt i 750 ml ammoniak). Sedan apparatens nedre rör förenats med CO_2-apparaten, igångsättes CO_2-strömmen; först därefter ihälles 50 ml NH_3-NaCl-lösning, detta för att förhindra, att lösningen rinner ned genom filtret. Då lösningen ihälles, upphör CO_2-strömmen, men den kommer åter igång, om man nu med vattensug minskar trycket över vätskan. Man reglerar undertrycket, ej med vattenkranen, utan med den kran, som sätter sugens säkerhetsflaska i förbindelse med luften. Man suger, med kolsyraapparatens kran helt öppen, så att en skur av fina CO_2-bubblor genomsätter lösningen och gör den nästan mjölklik. Efter ca. 4 min. börjar man närma sig mättning, vilket synes därpå, att det bildas ett skum på lösningen, som tenderar att gå över i sugen, och som man motar med den nyss nämnda kranen. Att försöket är avslutat, ser man därpå, att vätskan, om sugen avställes, visar en svag grumling. Detta inträffar efter 5 à 5 ½ min. Man kan nu sluta att inleda CO_2; bikarbonatfällningen tillväxer på egen hand och bildar till sist, efter ytterligare 5 min., en propp av lösningens volym.

Temperaturen stiger till 45 à 50°, vilket anges vara den i tekniken brukliga och lämpliga.

Utfört på detta sätt, går emellertid försöket glatt, endast om man förfogar över en kolsyraapparat med någorlunda stor kapacitet (t. ex. Uppsalamodellen). För laborationsändamål finnas väl i allmänhet endast små apparater, vari syran lätt skummar över, om man tar en rask gasström, särskilt sedan klorkalciumhalten i syran har stigit. Ovan beskrivna sodaframställning lämpar sig därför bäst som demonstrationsförsök; på laboratoriet ersättes den lämpligen av följande tillvägagångssätt. Lösningen av ammoniak-koksalt tages i en vanlig tvättflaska. Sedan tvättflaskan spolats av en rask CO_2-ström, tillslutes dess avloppsrör med ligatur och klämmare. Kolsyran fortsätter att strömma till, men visar snart tendens till avmattning. Om man nu skakar tvättflaskan kraftigt, kommer gasströmmen ånyo i gång, och på detta sätt fortsätter man att skaka vid behov, då efter 10 à 15 min. fällningen av bikarbonat uppträder.

[1] Specerihandlare Carl Salén, Hötorget 10, Sthlm, saluhåller rotting av alla dimensioner.

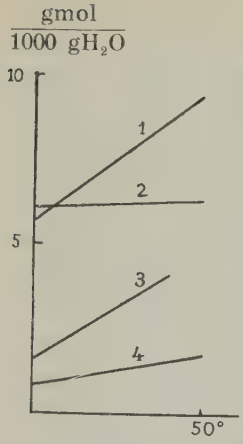


Fig. 3. 1. NH_4Cl.
2. NaCl.
3. NH_4HCO_3.
4. $NaHCO_3$.

Det på det ena eller andra sättet erhållna bikarbonatet tages på sugfiltrum, avsuges skarpt och tvättas med litet alkohol. Genom upphettning överföres det till soda under påvisande dels av CO_2-bildning, dels av att det blir starkare basiskt.

Förståelsen av den första etappen av sodaprocessen, bikarbonatbildningen, underlättas för eleverna genom följande tankegång. I den ammoniakaliska koksaltlösningen ha vi följande joner: Na^+, NH_4^+, Cl^-, OH^-. Tillsats av 1 mol. kolsyra tillför lösningen jonerna H^+ och HCO_3^-. Härav bildas omedelbart vatten. Möjliga jonkombinationer äro således NaCl, NH_4HCO_3, $NaHCO_3$, NH_4Cl. Dessa salters löslighetskurvor (i rent vatten!) anges i fig. 3, av vilken det omedelbart framgår, att natriumbikarbonat, såsom det svårlösligaste, utfaller.

Klorvätets volymsammansättning.

Av **G. STARCK.**

Klorvätets volymsammansättning kan demonstreras genom elektrolys av saltsyra med mycket tillfredsställande resultat, om elektrolysen företages i ett särskilt kärl, en elektrolysör, och gaserna uppsamlas i därifrån skilda gasbyretter.[1] Elektrolysören (fig. 1) består av en liten glasburk, 100 × 50 mm, tillsluten med en kautschukpropp. Proppen är försedd med 3 hål, ett för ett glasrör, 22 × 140 mm, med hål i botten, sidorör och kolelektrod, ett för en andra kolelektrod och ett för ett avledningsrör. Glasröret bildar anodrum, burken för övrigt katodrum. Gasbyretterna (fig. 2) äro tillverkade av smala, ograderade glasrör, 10 × 350 mm, nedtill förenade med varandra och medelst en ligatur med en nivåkula. Upptill avslutas rören av trevägskranar, vända åt samma håll och med slangar förenade med elektrolysörens avledningsrör. Härigenom får auditoriet se apparaten i profil. Spärrvätska i byretterna är vatten.

[1] Principen angiven redan av Lothar Meyer.

Elektrolyten är lämpligen en ca. 6-normal saltsyra (1 vol. konc. syra + 1 vol. vatten). En tillsats av koksalt är visserligen förmånlig ur den synpunkten, att anodvätskan hastigare mättas med klor, men medför å andra sidan en svag skumbildning i katodrummet, som skymmer förloppet och framför allt förhindrar kontroll av att vätskeytorna i anod- och katodrum stå lika högt, en kontroll, nödvändig för att försöket skall vara bevisande. Med endast saltsyra som elektrolyt förblir elektrolysören hela tiden alldeles genomskinlig, varjämte anodlösningens efter en stund gröna färg tydligt iakttages.

Fig 1.

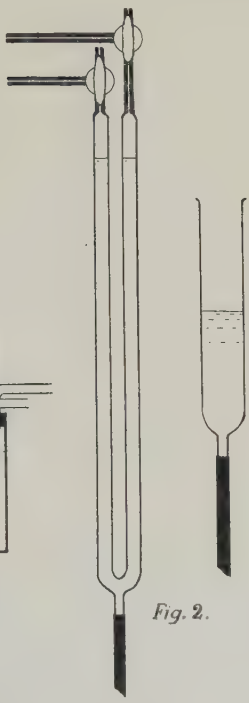


Fig. 2.

Försöket igångsättes med en strömstyrka av ca. 1 amp., motsvarande en tid av 1 min. för byretternas fyllande med gas (ca. 15 ml i vardera). Kranarna omställas nu samtidigt, så att gaserna strömma in i de förut vattenfyllda rören. Nivåröret sänkes, antingen i takt med vattennivåerna eller lika gärna och bekvämare omedelbart till jämnhöjd med byretternas nedre ände. Första gången sackar klorgasen efter, och samtidigt stiger vätskan i anodrummet; det blir sålunda ett kraftigt klorunderskott. Om nu försöket omedelbart upprepas, blir resultatet redan andra gången tydligt bättre, och efter 4 eller 5 upprepningar följas vätskeytorna i byretterna perfekt åt, samtidigt som vätskeytorna i katod- och anodrum stå lika högt. På mindre tid än 15 min. har man på detta sätt enkelt och med en ganska överraskande precision visat, att volymsproportionen väte : klor i klorväte är = 1 : 1.

Om klorväteelektrolysen företages i Hofmanns apparat, är först och främst en tillsats av koksalt nödvändig, vidare måste anodvätskan mättas med klor genom en långt i förväg inledd elektrolys, slutligen är resultatet i varje fall mycket ovisst, för att inte säga, med visshet orätt. För min del tvekar jag inte att beteckna Hofmanns apparat såsom för detta ändamål så olämplig som möjligt. Det här beskrivna tillvägagångssättet har, utom det företrädet, att det

ger ett gott resultat, även det, att det ej kräver någon elektrolys i förväg. Det vore tvärtom felaktigt att på förhand mätta anodlösningen med klor; man skulle då gå miste om iakttagelsen, att det ideala volymsförhållandet 1 : 1 successivt (och ganska snabbt) uppnås i den mån anodlösningen blir mättad.

Anmärkningsvärt är, att spärrvätskan i byretten kan utgöras av vatten; det sammanhänger med att en lugn vätskeyta absorberar gaser av medelmåttig löslighet mycket långsamt. Även lättlösliga gaser absorberas förvånande långsamt i smala kärl, särskilt, om lösningen är specifikt lättare än lösningsmedlet — ett förhållande, som gör sig påmint på ett oangenämt sätt vid demonstration av löslighet medelst den s. k. springbrunnen.

Objektiv demonstration av radioaktivt sönderfall med Geigers spetskammare.

Av **OSVALD LUNDQUIST.**

I junihäftet föregående år av denna tidskrift har lektor Eva Ramstedt beskrivit en anordning för registrering av α-partiklar bestående av en Geigers spetskammare i förening med ett förstärkaraggregat och högtalare. I det följande lämnas en beskrivning av en liknande apparatur, som av förf. sammanställts i avsikt att objektivt demonstrera utsändandet av α-partiklar från polonium eller någon annan α-emitterande radioaktiv substans. Den av mig använda försöksanordningen skiljer sig från den av lektor Ramstedt beskrivna huvudsakligen därigenom, att högtalaren här utbytts mot en av telegrafverkets s. k. samtalsräknare. I förening med en tvårörsförstärkare reagerar en dylik för i kammaren inkommande α-partiklar med en ljudstyrka, som tydligt kan uppfattas även över en mycket stor sal. Genom det i apparaten inbyggda räkneverket är det vidare möjligt, att direkt räkna antalet på en viss tid i kammaren infallande partiklar. Dessa räkneapparatens egenskaper i förening med den ringa anskaffningskostnaden[1] synes mig ge densamma ett visst företräde framför högtalaren.

Den experimentella anordningen återges i fig. 1. Medelst influensmaskinen J uppladdas leydnerflaskan L (kapacitet omkr. 1000 cm), vars båda beläggningar äro förenade med spetsen resp. cy-

[1] Den här använda typen bär beteckningen GM 2791/502 och betingar ett pris av 6 kr.

lindern av geigerkammaren G; R_1 är ett högohmigt motstånd om några tiotal megaohm, bestående av ett på ett stycke ritpapper uppdraget tuschstreck (0,2—0,3 mm brett, 25 mm långt). Förstärkaren är uppbyggd av två Telefunkenrör (RE 034 och RE 134), vilkas glödkatoder matas med ström från tre seriekopplade nife-

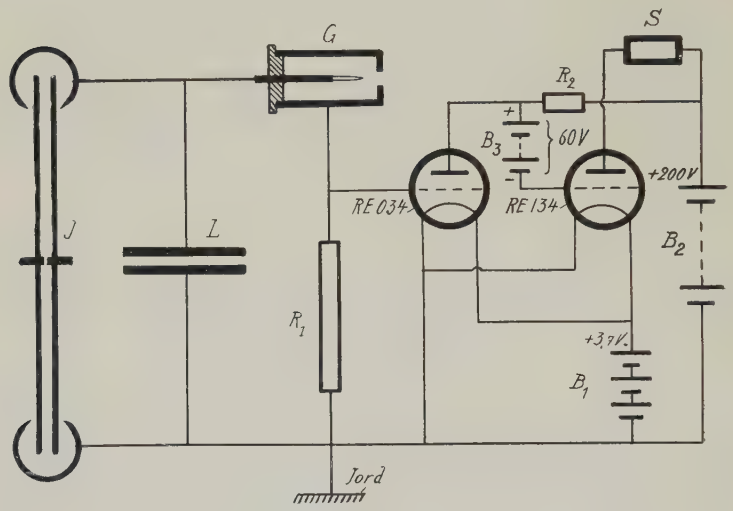


Fig. 1.

celler (B_1 i fig. 1). Anodspänningen på rören bör vara ungefär 200 volt (B_2 i figuren). Förfogar man över en belysningsspänning om 220 volt, erhålles anodspänningen enklast genom att förena belysningsnätets pluspol med anoderna. R_2 är ett motstånd om 1 megaohm av det slag, som allmänt användes inom radiotekniken (»gallerläcka»).

I det sista rörets anodkrets är räkneapparaten S (samtalsräknaren) inkopplad. Denna innehåller en med järnkärna försedd strömspole, som genomflytes av anodströmmen. En strömstyrka av 15—20 milliampère är tillräcklig för att åstadkomma en så stark magnetisering, att spolen attraherar ett framför densamma befintligt ankare. Detta kvarhålles eljest av en spiralfjäder på något avstånd från elektromagneten. Varje gång ankaret attraheras, påverkas genom en vinkelhävstång räkneverket, varvid en ny siffra föres fram på detsamma. Figur 2 visar räkneapparaten med avtagen skyddskåpa (ung. $^1/_2$ nat. storlek). Sp är strömspolen, A ankaret, F fjädern och R fyra med siffror försedda räknerullar.

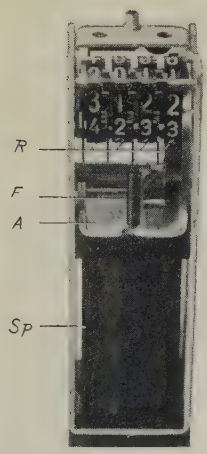


Fig. 2.

Då geigerkammaren ej är i funktion, d. v. s. inget preparat befinner sig framför kammarens öppning, måste strömstyrkan genom räkneapparaten vara så liten, att ankaret ligger kvar i sitt av fjädern fixerade viloläge. Genom inkoppling av ett batteri av lämplig storlek mellan det första rörets anod och det andras gitter (B_3 i fig. 1; minuspolen på gittret) kan strömstyrkan genom elektromagneten göras godtyckligt liten. Vid en spänning av 55—60 volt är nämnda strömstyrka = 0. Det är i allmänhet lämpligast att låta förstärkaren arbeta under denna betingelse.

Under förutsättning att spänningen mellan geigerkammarens spets och cylinder har en lämplig storlek[1] (jfr lektor Ramstedts artikel), utlöses av varje i kammaren inkommande α-partikel en mycket kortvarig spetsurladdning. Denna förorsakar i sin ordning en kortvarig uppladdning av cylindern och det med denna förenade gittret av det första elektronröret. Varje sådan uppladdning ger i det andra rörets anodkrets (alltså också genom *S*) upphov till en strömstöt av 25—30 milliampères styrka, vilken är tillräcklig för att bringa elektromagneten att under ett kort tidsmoment draga ankaret till sig. Varje ankarets slag mot magneten markerar därför en α-partikels inträde i kammaren. Dessa slag äro så starka, att det åtföljande ljudet är tydligt hörbart över ett stort auditorium.

Har man genom vridning på influensmaskinen ökat spänningen mellan kammarens spets och cylinder över gränsen för självurladdning,[2] visar sig detta så, att räkneapparaten börjar att »knäppa» även utan preparat framför kammaren. Knäppningarna avtaga emellertid snart i styrka och antal, beroende på att spänningen så småningom sjunker. Deras upphörande utgör ett tecken på, att den självständiga urladdningen vid spetsen upphört. Apparaten är då färdig att tagas i bruk. Efter några minuter har spänningen gått ner till det minimivärde (ung. 2400 volt), under vilket kammaren upphör att reagera för de inkommande partiklarna. Man har då endast att vrida ett par varv på influensmaskinen för att åter bringa upp spänningen i reaktionsområdet.

[1] Med de här använda spetsarna (grammofonstift, typ: Husbondens röst; Extra soft) mellan 2400 och 2700 volt.

[2] Denna inträder vid ung. 2700 volt.

Bokanmälningar.

E. Hubendick, *Differential- och integralräkning.* Sv. Bokförlaget, Stockholm 1936, 319 sid., kr. 10:75.

Föreliggande bok framträder med stora anspråk. I förordet kritiserar förf. våra dagars läroböcker i matematik; de tillfredsställa sällan »överdrivna fordringar på att förstå». Förf:s mening är nu, att denna bok skall lägga en fast och säker grund för dem, som måste tillägna sig matematiska kunskaper, behövliga på så många områden, och detta på ett sådant sätt att inga onödiga svårigheter införas. Det är alltså med stor förväntan, man påbörjar studiet av boken.

Intresset mattas emellertid tämligen snart. Man kan ej undgå att känna sig irriterad av den tunga framställningsformen. Ofta måste man ta sig en allvarlig funderare på vad förf. egentligen menar. Ej heller underlättas studiet av boken genom förf:s bristande precision. Å sid. 50 t. ex. talas om konvexa och konkava kurvor, men förf. glömmer att angiva, åt vilket håll detta gäller. Överraskning känner man också inför följande: »Om en funktion har ett nollställe, få vi ej integrera över detta, för den händelse funktionen byter tecken vid detta nollställe». Väl kan man förstå, vad som avses, men satsen är matematiskt oriktig med den formulering, förf. givit den. Beteckningarna äro ej alltid de, som allmänt användas i andra svenska läroböcker. Det måste verka förvirrande för en lärjunge att finna beteckningen e — vanligtvis betecknande excentriciteten — för halva brännpunktsavståndet i en ellips och benämningen exponentialfunktion för funktionen x^n.

Boken börjar med att definiera och åskådliggöra funktionsbegreppet. Som en första introduktion är framställningen acceptabel, men man skulle dock vänta, att förf. i ett arbete av denna art försökt klargöra, vad som menas med en kontinuerlig funktion, ett begrepp, som förf. senare förutsätter bekant. En granskare kan ej undgå att konstatera, att förf. har en felaktig uppfattning om detta viktiga begrepp. Å sid. 163 skriver han: »I en diskontinuitetspunkt övergår förstaderivatan plötsligt från positiv till

negativ eller tvärtom.» Undersöker man illustrationsmaterialet för att finna förf:s mening med påståendet, avslöjar detta, att förf. anser en funktion diskontinuerlig i en punkt, om första derivatan är det. Fig. å sid. 235 bestyrker detta ytterligare.

Förf. ger sedan en kort framställning av den analytiska geometrien. Behandlingen av detta område i svenska läroverk sker numera alltid i intimt sammanhang med differentialräkningen och har utformats på ett mycket lyckligt sätt. Det är därför med olust man tager del av de klumpiga metoder, som man trodde tillhöra ett övervunnet stadium. Förf. briljerar med långrandiga bevis, där dock det väsentliga är undanskymt. Vid härledningen av ekvationen för ellipstangenten finner sig läsaren, för att beviset skall vara bindande, till sist tvungen att påvisa, att linjen $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ skär ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i endast en punkt. T. o. m. förf. avstår därifrån och nöjer sig med att säga, att så är fallet. För parabeltangenten användes en annan metod, visserligen ej så lycklig den heller men dock överlägsen den förra. Förf. tillägger, att denna metod också kunde ha använts för ellipstangenten. Varför anföres då den förra? Härledningen av hyperbelns asymptoter är direkt felaktig. Förf:s definition på en asymptot är följande: »En rät linje av den beskaffenhet att den går genom origo och ständigt närmar sig en kurva, men först möter kurvan oändligt långt bort kallas asymptot till kurvan». Om man bortser från origodistraktionen, inser man omedelbart, att oändligt många inbördes parallella linjer uppfylla de krav, som uppställas i definitionen, utan att vara asymptoter. För hyperbelasymptoternas ekvationer anför förf. tvenne härledningar. Den första finner han och det med rätta ej beviskraftig. Trots förf:s motsatta mening är den andra det ej heller. Han sätter $y_a=\pm\frac{bx_a}{a}$ och $y_k=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x_a^2-a^2}$ och anför: »Vi se att alltid y_k är mindre än y_a samt att denna skillnad blir så mycket mindre ju mindre a^2 är i förhållande till x_a^2 eller omvänt, då ju a är en konstant, ju större x_a är. Först vid $x_a=\infty$ blir skillnaden noll». »Beviset», för det är väl avsett som sådant, berättigar naturligtvis ej till slutsatsen i sista meningen. Samma resonemang kan t. ex. användas på uttrycket $x_a-\sqrt{x_a(x_a-a^2)}$, och dock tenderar ej detta mot noll, då x_a växer obegränsat. Metoden är typisk för förf:s sätt att bevisa; det synes ofta vara en slump, att han kommit till riktigt resultat.

Förf. har två kapitel om hyperblar och parablar av högre ordning. Därmed avses kurvor av formen $y=x^n$ resp. $y^n=x$.

Då n kan antaga alla värden, har man svårt att inse skillnaden mellan dem. För övrigt är framställningen ett sammelsurium av oklarhet och misstag. Man känner nästan häpnad, då förf. skriver: »För $n = \infty$ är $y = x^{\infty} = x^{\frac{1}{0}}$ eller alltså $x = y^0 = 1$ d. v. s. en rät linje parallell med y-axeln.»

Ej lyckligare är förf., då det blir tal om en funktions gränsvärde. Kapitlet börjar med följande sats, avslöjande katastrofal okunnighet: »Ett bråk, vars nämnare innehåller andra faktorer än 2 och 5 giver vid dess förvandling till decimalbråk ett irrationellt tal med ett oändligt antal siffror.» Vad ett gränsvärde är, får man aldrig veta. Förf. vet det ej själv att döma av följande: »Vi finna att med avtagande x närmar sig $\frac{\sin x}{x}$ alltmer talvärdet 1, men vi finna ej gränsen, vilken erhålles för $x = 0$, ty där erhålles det obestämda värdet $\frac{0}{0}$, vilket ej behöver vara 1.»

Förf:s diffusa uppfattning av begreppet gränsvärde får ödesdigra följder för behandlingen av differential- och integralräkningen. Det är nödvändigt att anföra förf:s definition på vad som menas med en differential, vilket är kärnpunkten i hela den följande framställningen: »Dessa differenser, som äro mindre än varje uppgivbart värde, men större än noll, kalla vi emellertid ej längre för differenser, ty de utgöra gränsen för differenserna eller, om vi så vilja, för delbarheten. De benämnes differentialer.» För förf. blir begreppet differential en »nolla», som skiljer sig från andra nollor, därigenom att man ogenerat får dividera med den. Om förf. verkligen avser en gränsövergång — och så måste man tolka förf:s resonemang — är definitionen emellertid meningslös, då gränsvärdet av en differens är noll, trots förf:s motsatta påstående. Då hela den följande deduktionen av derivator och integraler grundar sig på denna ohållbara definition, blir det hela snedvridet. Läsaren, som tack vare gott åskådningsmaterial — bokens förtjänst — kanske lyckas få något grepp om förf:s mening, måste konstatera, att vad förf. kallar derivator endast framstår som approximativa värden av kvoten mellan två differenser. Även vid användningen av derivator råkar förf. illa ut. Å sid. 163 påstås att, då första och andra derivatan är noll, föreligger en inflexionspunkt. Ej så säkert!

Av det ovan sagda framgår, att boken har så fundamentala brister, att dess värde är ytterst ringa.

Arvid Uhler.

Torsten Odhe, *Skogen blir kläder.* Kooperativa förbundets bokförlag, Stockholm 1936, 160 sid., häft. kr. 1:50.

Anton Zischka, *Kampen om bomullen — en världsfaktor.* Åhlén och Söner, Stockholm 1936, 176 sid., inb. kr. 3:75.

Det första av ovanstående arbeten är tydligen avsett för den breda publik, som Kooperativa förbundet bl. a. genom sin tidskrift vill meddela tekniska och nationalekonomiska kunskaper i lättsmält form. Som bredvidläsning till skolkursen i kemi har den så gott som intet att ge. Dess upplysningar om de kemiska processerna vid tillverkning av cellulosamassa och konstsilke äro t. o. m. ännu magrare än de gängse läroböckernas. Om den djupgående kemiska skillnaden mellan äkta silke och konstsilke nämnes ej ett ord, ja, man undrar om författaren själv har denna skillnad klar för sig, när han på sid. 125 skriver: »Man (d. v. s. tullmyndigheterna) slapp ju på så sätt att hitta på metoder för att skilja konstsilkefibrer från natursilkefibrer» — som bekant en enkel sak. Däremot är den historiska inledningen — om produktionen av natursilke i Sverige och hur konstsilket uppfanns — rolig och instruktiv. Detsamma gäller även kapitlet om den svenska sulfitcellulosan samt delvis sista kapitlet, om den svenska konstsilkesindustrien. Men varför skola dess på sid. 128 omtalade pioniärer vara anonyma? Är »G.» på denna sida identisk med Gustafsson å sid. 129–131? Deras parallella oden göra det sannolikt, att så är fallet. Men varför i så fall »låt oss kalla honom för G.»? Och varför får vi inte veta något mer om »låt oss kalla honom för A.» på sid. 128?

Språket är tungt och verkar stundom dålig översättning från tyskan; rena språkfel äro ej sällsynta. När författaren någon gång försöker få litet mer flykt över det hela, tappar han kontakten med verkligheten: »Dessa maskiner äro, om man så vill, de jättelika konstgjorda silkemaskar, med vilkas hjälp det mänskliga uppfinnarsnillet i miljonfaldig (!) skala utför samma process som de levande silkesmaskarna, när de, efter att ha smält sin mat av mullbärscellulosa (!), nysta sina kokonger.»

»Kampen om bomullen» är en underbart rolig bok, full av nya och häpnadsväckande fakta, väl värda att ha reda på. Här och där händer det visserligen, att läsaren måste säga sig: »Nej, det här kan knappast vara sant, det *måste* jag läsa om någon annanstans också.» Men att en bok — låt vara genom en och annan överdrift — stimulerar till vidare studier i ämnet kan inte vara ett allvarligt fel. »Kampen om bomullen» rekommenderas livligt.

Elsie Hultén.

P. B. Freuchen, *Kemisk Potential og andre fysisk-kemiske emner.* P. Haase & Søn, Köpenhamn 1936, 83 sid., kr. 3: 75.

Denna lilla monografi behandlar i huvudsak fasläran och dess tillämpningar på system med en komponent, ett ämne, som just nu inte kan sägas vara föremål för fysikernas eller kemisternas intresse. I stället är ämnet eller borde vara välbekant för alla äldre kemister, för vilka Gibbs, van't Hoff, Planck (termodynamikern), Nernst, Roozeboom och van Laar voro några av de heliga skrifternas författare. Icke desto mindre eller kanske just därför är Freuchens arbete en mycket nöjsam lektyr; det är, utan att vara matematiskt, skrivet med stor klarhet, ställvis med kritisk skärpa. Av innehållet må framhållas kapitlet om vattnets verkliga tripelpunkt, d. v. s. den temperatur, vid vilken luftfritt, i motsats mot vanligt vatten är i jämvikt med is och ånga, bestämd av dansken K. Prytz redan 1893 med en noggrannhet, som ej överträffats av senare bestämningar. Här skymtar, inom parentes sagt, ett nytt problem för faslärans adepter, om sådana ännu finnas, nämligen bestämningen av tripelpunkterna för alla de vattenslag, som väteisotoperna bragt i dagen. Andra välskrivna kapitel behandla Jämvikt vid oenhetligt tryck, Osmotiskt tryck och Det osmotiska tryckets natur. Det vore önskvärt, att även en yngre generation toge del av denna enkla och klara framställning av ett ämne, som väl må kallas fundamentalt, även om det nu ej är aktuellt.

G. Starck.

Tore Knöös, *Elementär lärobok i kemi.* A. V. Carlsson, Stockholm 1936, 119 sid., 2 kr.

Innehållet i denna för studiecirklar och folkhögskolor avsedda bok är uppdelat i korta kapitel, av vilka de 11 första (23 sid.) utgöra en inledande redogörelse för de enklaste kemiska företeelserna (grundämnen, föreningar, oxider, syror, baser, salter) och för några satser av allmänt innehåll (atomer och molekyler, kemiska tecken, valens, elektrolys, metallernas spänningskedja). Därefter följa 26 avsnitt, innehållande (på 51 sid.) redogörelsen för ungefär lika många grundämnen och deras betydelsefullaste föreningar, slutligen 18 kapitel organisk kemi (35 sid.). Arbetet avslutas av ett 20-tal stökiometriska räkneuppgifter, 5 tabeller med några viktiga konstanter, därav en atomviktstabell, och register.

En handledning, avsedd »att göra den elementära tekniskkemiska litteraturen tillgänglig för den intresserade ungdomen»

borde enligt ref:s mening framför allt inrikta sig på att ge en verkligt åskådlig och någorlunda fyllig framställning av olika kemiska föreningstyper och deras egenskaper och av olika reaktionstyper och därav betingade arbetsmetoder samt slutligen av allmänna kemiska lagar och åskådningar, inklusive atomteorien. Däremot borde väl en på detta mål inriktad lärobok avstå från att söka lämna en systematisk framställning av grundämnena och överlämna den åt de fortsatt studierna. Förf. har tyvärr icke följt sin egen ledstjärna, utan skrivit en komprimerad och högst traditionell lärobok i kemi, genom ramens trånghet och ämnets omfattning därtill dogmatisk och föga åskådlig. Visserligen kompletteras texten av 124 försök, men förf. hyser, av förordet att döma, endast små förhoppningar, att försöken komma till utförande. Under sådana omständigheter hade ett rikligt och exakt åskådningsmaterial i form av noggrant dimensionerade, goda bilder varit på sin plats. I detta avseende lämnar boken alltför mycket övrigt att önska, både kvalitativt och kvantitativt. Fråga är, om arbetet inte är för svårt för ett självstudium; även samarbetet i en studiecirkel torde endast med svårighet bemästra de gåtor, som det förelägger läsaren. En erfaren handledare är nog nödvändig för textens utläggande.

Tyvärr måste en del icke oväsentliga misstag påtalas. Även språkliga, t. ex. den i kemisk text ej så sällsynta oöverenstämmelsen mellan substantivets och det tillhörande adjektivets genus.

Det är välbekant, att den kvantitativa syntesen av svaveljärn ej kan utföras. Vad förf. anför härom på sid. 7 är ett tankeexperiment, den verkliga syntesen utföres också mycket riktigt med koppar (förs. 1). På sid. 19 längst ned läses, att sulfatjonen reagerar med vatten, på sid. 20, att natriumjonen reagerar med vatten. Det är det misstag, som Arrhenius' motståndare gjorde sig skyldiga till. Men även om man, såsom i texten till dessa formler, säger metalliskt natrium, resp. den urladdade sulfatjonen, så ger man en oriktig och för länge sedan övergiven förklaring till vätgas- resp. syrgasbildningen vid elektrolys av natriumsulfat. På sid. 24 säger förf., att heliums lyftkraft endast är hälften av vätets. För det första bör det heta lyftkraften i luft, ty i och för sig har gasen ingen lyftkraft. Därtill kommer, att den i luft av 0° och 1 atm. är 1,11 kgf/m³, d. v. s. 92,5 % av vätgasens. — Att i ett arbete av detta omfång och denna syftning omnämna selen må ju kunna försvaras, att upptaga tellur men utelämna arsenik, antimon, kobolt, nickel, krom, volfram m. fl., vilka visserligen dyka upp i texten, men ej, som tellur i kapitelrubriker, får väl sägas vara ett fel. — På sid. 38 anges, att rå saltsyra är gul på grund av

klorhalt. Klorhalten är nog obetydlig i jämförelse med järnhalten. — Sättkolven i fig. 13 kommer att implodera, om den har normal godstjocklek, och bör ersättas av en rundkolv. — Kaliumkarbonat (sid. 51) kan ej framställas analogt med soda. — Kromgult är ej blybikromat, utan neutralt blykromat (sid. 67). — Masugnen (sid. 68) beskickas ej med järn (lapsus). — I det periodiska systemet (sid. 75) sammanföras de sällsynta jordarterna utom La med hafnium i grupp IV, medan hafnium i verkligheten står ensam i grupp IV.

Man kan väl förstå, att folkhögskolan och studiecirklarna kräva en särskild typ av handledning vid studierna. Hur den lämpligen skall vara beskaffad, tilltror sig ref. ej att avgöra, men beträffande Knöös' arbete torde man vara berättigad att fordra en grundlig överarbetning för att det skall fylla måttet.

G. Starck.

Berg-Hagström, *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor.* Andra delen. För 4- och 5-årig realskola; klasserna 3^5—5^5, 2^4—4^4, L I^4. Tolfte uppl., omarbetad av lektor Elis Hjalmar. C. E. Fritze, Stockholm 1937, XX sid., kr. 2:30, facit 30 öre.

Ehuru blott tre år förflutit sedan ovan nämnda lärobok utgavs i omarbetat skick, har det likväl befunnits nödvändigt att redan nu omarbeta dess andra del. Anledningen är, att vi under tiden fått bättre besked om fordringarna i realskolans två översta klasser. Det har visat sig, att lärobokens kurs i algebra varit otillräcklig. Denna brist har nu avhjälpts. Numera fordras även fullständiga andragrads ekvationer jämte problem. Detta krav har också tillgodosetts. Den förskjutning till förmån för algebran, som inträtt genom de nya bestämmelserna, har föranlett förf. att också omarbeta vissa delar av ekvationsläran samt utöka läran om kvadratrötter. Överhuvud märker man nu mera av den insats, den sista länken i författartrilogien gjort, än förut. I ett avseende kan boken anses som ny. Detta gäller metodiken, som helt präglas av förf:s smak. För det arbete förf. här nedlagt, är han värd allt erkännande, även om man i ett eller annat fall kan ha en avvikande mening. Jag vill påpeka ett par saker, som jag funnit mera anmärkningsvärda. Först ett par felaktigheter. Förf. har (sid. 116) satt likhet mellan priset på en obligation och kursen; i ett av exemplen är priset detsamma som kursvärdet + upplupen ränta. På sid. 141 påstås, att en funktion, i vilken variablerna äro av andra och högre grad representeras av kroklinjer. Funktionerna $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, m. fl. vederlägga ju påståendet. Sedan ett

par anmärkningar, som gäller det rent pedagogiska. Bortskaffandet av nämnarna i en ekvation sker dels genom att göra samtliga termer liknämniga, dels genom att multiplicera med m. g. d. Förf. påstår, att den sista metoden är snabbare och säkrare. Är det inte strängt taget samma räkning, som utföres båda gångerna? Vilken metod, som är lämpligast, kan ju sedan diskuteras. Vid behandlingen av likformighetsläran (sid. 190) har förf. för att åskådliggöra, hur man kan få två likformiga trianglar, valt att avbilda en triangel i skalan 2:3 så, att vinklarna parvis bli lika samt sidorna i den nya triangeln $= \frac{2}{3}$ av motsvarande sidor i originalet. Har förf. någonsin utfört denna konstruktion? Det sist valda exemplet kan åtminstone till en viss grad karakterisera förf:s metodik. I sin iver att tillrättalägga och förklara skjuter han en och annan gång över målet.

Med denna anmärkning har jag inte velat förringa bokens värde. Den är bra och försvarar säkerligen sin plats i den icke alltför lätta konkurrensen.

Verner Carlson.

E. v. Angerer, *Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen*, 3:e Aufl. Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1936, 201 S., RM 9:80.

Boken är en sannskyldig guldgruva för en fysiker. Förf., prof. vid Tekniska Högskolan i München, har i densamma samlat resultaten av en rik erfarenhet. Han har utprovat både gammalt och nytt; särskilt ha nyare amerikanska arbeten planmässigt genomgåtts. En nyhet för tredje uppl. — den första har enl. förf. numera endast intresse för arkeologer — är en rikhaltig förteckning över firmor, som leverera, vad en fysiker behöver i material- och apparatväg.

Några rubriker må ge ett begrepp om det rikhaltiga innehållet. metaller, legeringar, kvarts, glas m. m.; lödning, svetsning, kitt; bearbetning av glas; vakuumteknik; tunna folier och trådar; isolatorer; termoelement; fotografi; fysikalisk optik; elektriska ugnar.

C. E. Blom.

Gradualavhandlingar.[1]

Gunnar Wode, *Några etylenoxiders hydrolyshastighet.* Lund 1936, 112 sid. Disp. vid Lunds Universitet d. 31 okt. 1936. Opponenter: professor E. Larsson, Göteborg, och fil. lic. Tore Widhe, Stockholm.

Kol-syre-kolbindningars hydrolyshastighet brukar kunna återgivas genom en sammansatt konstant: $k = k_0 + k_s[H] + k_a[OH]$. För de flesta typer av föreningar, som tidigare undersökts, ha endast en eller två av delkonstanterna k_0, k_s och k_a kunnat mätas. För neutrala etylenoxider kunde däremot samtliga tre delkonstanter bestämmas. Mätningarna av dessa konstanter skedde dels med analytiska metoder och dels i dilatometer.

Enbasiska etylenoxidkarbonsyrors hydrolyshastighet mättes i dilatometer och kunde återgivas med uttrycket: $v = (k_0 + k_s[H])[Mol] + k_a[OH][Jon]$, där [Mol] och [Jon] beteckna glycidsyramolekylernas resp. -jonernas koncentrationer. Den delreaktion, vars hastighet angives av konstanten k_0, och som vid beräkningarna antogs ske genom spontan vattenaddition till syramolekylerna, kan även ha skett genom vätejonkatalyserad vattenaddition till syrajonerna. Spontan hydrolys av syrajonerna och hydroxyljonkatalyserad hydrolys av syramolekylerna kunde icke observeras. Den sista reaktionens hastighetskonstant $k_{a\,mol}$ beräknades under antagande, att konstanterna k_0 representera spontan reaktion av syramolekylerna och att syramolekylernas tre delkonstanter k_0, k_s och $k_{a\,mol}$ äro förbundna med varandra genom samma ekvation, som nedan omtalas gälla för de neutrala oxidernas delkonstanter.

Tvåbasiska glycidsyrors hydrolys följdes genom ledningsförmågemätningar och i dilatometer. Hastigheten visade sig proportionell mot koncentrationen av envärda glycidsyrajoner. Reaktionen kan uppfattas som spontan hydrolys av envärda joner, som vätejonkatalyserad hydrolys av tvavärda joner eller som hydroxyljonkatalyserad hydrolys av syramolekyler. De odissocierade syramolekylerna visade ingen spontan eller vätejonkatalyserad hydrolys och de tvåvärda jonerna ingen spontan eller hydroxyljonkatalyserad hydrolys.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

De neutrala oxidernas delkonstanter befunnos förbundna med varandra genom uttrycket: $c_0 k_0 = c_a k_a + \log k_s$, där konstanterna c_0 och c_a vid en och samma temperatur hade lika värden för samtliga undersökta oxider. BRÖNSTEDS uttryck för kvoten $k_a/k_0 = G_-/G_0 \cdot C^y$ erhålles som ett specialfall av ekvationen, som då $k_s = 1$, övergår till $k_a/k_0 = c_0/c_a$. Däremot kan BRÖNSTEDS uttryck för kvoten k_s/k_0 icke erhållas ur ekvationen. Enligt denna kan k_0 uppdelas i två konstanter: $k_0' = c_a/c_0 \cdot k_a$ och $k_0'' = \log k_s/c_0$. Olika substitutioners effekter på k_0' och på k_a stå sålunda i konstant förhållande till varandra, medan deras effekter på k_0'' äro proportionella mot logaritmerna för effekterna på k_s.

Det förhållandet, att epiklorhydrins delkonstanter satisfiera ekvationen lika väl som övriga etylenoxiders, kan uppfattas som ett stöd för åsikten, att kloravspjälkningen i alkalisk lösning hos denna förening föregås av en hastighetsbestämmande, hydroxyljonkatalyserad hydrolys av oxidoringen. Av ELTEKOW uppställda regler, som avse alkylsubstitutioners inflytande på etylenoxiders vattenadditionsförmåga i rent vatten, synas delvis ha tillkommit genom iakttagelser av vätejonkatalyserade reaktioner.

Oxidoringens vätejonkatalyserade hydrolyshastighet varierar mera vid substitutioner i oxidmolekylen än den hydoxyljonkatalyserade hydrolysens och denna åter mera än den spontana reaktionens hastighet. Den vätejonkatalyserade hydrolysen påskyndas av alkylsubstitutioner — särskilt snabb blir den genom dialkylsubstitution i 1-1-ställning, då oxidoringen innehåller tertiär kolatom — och fördröjes, när negativa substituenter såsom klor, hydroxyl- och karboxylgrupper införas i molekylen. Ju närmare oxidoringen en karboxylgrupp befinner sig i molekylen och ju flera karboxylgrupper denna innehåller, dess långsammare går den vätejonkatalyserade hydrolysen. Närvaron av karboxylgrupp synes även minska inverkan av alkylsubstitution i 1-1-ställning.

Logaritmerna för den vätejonkatalyserade hydrolysens hastighetskonstanter för i metylgruppen med hydroxyl, karboxyl, klor och brom substituerade propylenoxider äro approximativt proportionella mot dissociationskonstanterna för med samma grupper β-substituerade propionsyror (K_β).

Den hydroxyljonkatalyserade hydrolysen av neutrala oxider fördröjes genom alkylsubstitutioner — största effekten fanns vid substitution i 1-2-ställning — och påskyndas av negativa substituenter såsom hydroxyl och klor.

Det finns vissa skäl för antagandet, att med olika negativa grupper substituerade propylenoxiders alkaliska hydrolyshastigheter skulle vara direkt proportionella mot med samma grupper

substituerade ättiksyrors dissociationskonstanter. Då log k_s var approximativt proportionell mot K_β, skulle i detta förhållande kunna finnas en analogi till uttrycket för sambandet mellan de tre delkonstanterna, där k_s också uppträder i logaritmisk form. Substitutionernas olika inflytande på väte- och hydroxyljonkatalyserad hydrolys kan tänkas uppstå därigenom, att den hydroxyljonkatalyserade reaktionen huvudsakligen sker vid bindningen närmast en negativ substituent, medan vätejonkatalyserad hydrolys sker vid den bindning, som är mest avlägsen från sådana substituenter.

Karboxylgruppen har troligen liknande effekt på den hydroxyljonkatalyserade hydrolyshastigheten som övriga negativa substituenter, men dess inverkan kan inte direkt iakttagas, då syrorna ju i alkalisk lösning förekomma i jonform. Jonladdningen hämmar den hydroxyljonkatalyserade hydrolysen, särskilt starkt framträdde detta hos β-γ-oxidosmörsyra och etylenoxiddikabonsyrorna.

Kvoten k_s/k_a, som av flera författare använts för systematisering av olika substituenters inflytande på estrars hydrolyshastighet, varierar mycket regelbundet hos etylenoxiderna. Ju flera alkylgrupper de neutrala oxiderna innehålla, dess högre är kvoten. Negativa substituenter medföra lägre kvoter. Syrornas kvoter k_s/k_a avvika avsevärt från de neutrala oxidernas, men deras beräknade kvoter $k_s/k_{a\,\mathrm{mol}}$ äro av samma storhetsordning, som man kunde vänta, om karboxylgruppens inflytande vore likvärdigt med övriga negativa substituenters.

Den spontana hydrolysens hastighet förändras genom substitutioner i neutrala oxider närmast parallellt med den hydroxyljonkatalyserades. Syrornas konstanter k_0 äro av samma storhetsordning som de neutrala oxidernas.

De neutrala oxidernas hydrolyshastighet mättes vid två temperaturer. Aktionskonstanter och aktiveringsenergier beräknades. De vätejonkatalyserade reaktionernas aktionskonstanter voro genomgående högre än motsvarande hydroxyljonkatalyserades. Vid vätejonkatalyserad hydrolys visade propylenoxid, epiklorhydrin och glyceringlycid nära lika aktionskonstanter, de två sistnämnda föreningarna hade tydligt högre aktiveringsenergier än propylenoxiden. Detta antyder, att kloratomens och hydroxylgruppens inflytande på reaktionshastigheten är av polär natur. Alkylsubstitutioner åstadkomma däremot parallella förskjutningar i aktionskonstanter och aktiveringsenergier.

Alf af Ekenstam, *Ueber die Celluloselösungen in Mineralsäuren.* Beiträge zur Konstitutionsermittelung der Cellulose. Lund 1936. A.-B. Ph. Lindstedts Univ.-Bokhandel, 157 sidor. Disp. vid Lunds Universitet 24 oktober 1936. Opponenter: professor H. Staudinger, Freiburg i. Br., professor L. Smith, Lund och fil. mag. B. Sjöberg, Lund.

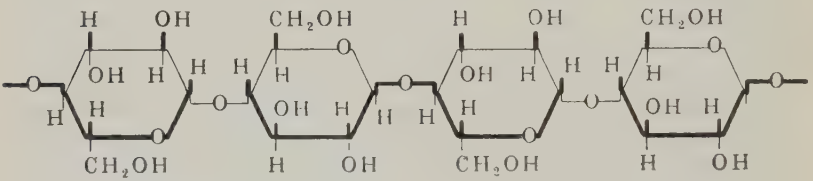
Författaren har tidigare dels i Tyskland och dels i Sverige varit sysselsatt med forskningar inom träkemien. Det är dessa arbeten, som givit uppslaget till här refererade avhandling. Vid försök med den vanliga metoden att bestämma lignin i trä, vilken som bekant utföres på så sätt, att cellulosa och övriga kolhydrater avlägsnas med starka syror, gjordes vissa intressanta iakttagelser, som visade, att dessa syror först (i vanlig bemärkelse) i oförändrad form *lösa* cellulosan, varefter i denna lösning en reaktion sker mellan cellulosan och syran. Denna senare reaktion går dock i regel med en så oerhörd hastighet, att cellulosan lika fort förstöres, som den upplöses. Genom dels mycket väsentliga förbättringar av upplösningstekniken och dels utnyttjande av de vid studier av betingelserna för ovannämnda reaktion gjorda iakttagelserna kunde fullständigt homogena lösningar erhållas, som innehöllo cellulosan i praktiskt taget ursprunglig form — ett framsteg, som för såväl vetenskap som teknik torde vara av stor betydelse. Hittills har man knappast räknat med mer än ett lösningsmedel för cellulosa, och det är kopparhydroxidammoniak (Schweizers reagens). Detta är dock föga lämpligt som lösningsmedel för högmolekulär cellulosa, då denna cellulosa, upplöst i Schweizers reagens, är ytterst ömtålig dels mot ljus och dels mot luftsyre. Denna brist på lämpligt lösningsmedel för cellulosa har bidragit till att det ännu finnes mycket starkt divergerande uppfattningar om cellulosans konstitution. I mineralsyrelösningarna är cellulosan varken ömtålig mot ljus eller luft, varför mineralsyrorna av denna anledning äro att föredraga framför Schweizers reagens.

I cellulosalösningar av ovannämnda slag har förf. gjort en rad av mätningar, ur vilka viktiga slutsatser angående cellulosans konstitution har kunnat dragas. Endast ren cellulosa, såsom bomull, har undersökts.

I inledningen till avhandlingen gives först en mycket kort översikt, av vad som hittills är bekant om cellulosans konstitution. Huvudvikten är lagd på den uppfattning, som framlagts av Staudinger. Denne har bl. a. framställt det djärva antagandet, att de kolloider, som vanligen betecknas som lyofila, äro uppbyggda

av molekyler, som besitta trådformig struktur. I lösning äro dessa trådmolekyler stavformiga, och längden hos dessa stavar kan vara ända upp till 10 000 gånger (eller ännu längre) stavens tjocklek. Ett mycket stort experimentellt material har bekräftat sannolikheten hos denna Staudingers hypotes, vilket torde göra, att den nu är ganska allmänt antagen. Cellulosa och kautschuck äro exempel på i naturen förekommande ämnen, som ha trådformiga molekyler. I lösning ger sig den stavformiga molekylen till känna på det sättet, att den ger förhållandevis viskösa lösningar. Staudinger har visat, att det råder direkt proportionalitet mellan längden hos det upplösta ämnets molekyler och lösningens viskositet (gäller blott i mycket starkt utspädda lösningar). Vi ha här en metod att mycket enkelt bestämma högmolekylära ämnens (som ha trådstruktur) molekylvikt. Metoden torde i en nära framtid få stor praktisk betydelse.

Enligt Haworth kan cellulosans formel $(C_6H_{10}O_5)_n$ skrivas på följande sätt:



En del av en cellulosamolekyl enligt engelsmannen Haworth (1932).

I avhandlingen visas sedan, hur man måste tänka sig, att cellulosans upplösning i mineralsyror sker. Viktigt är då bl. a., att mineralsyran i fråga föreligger i en inom vissa gränser tillåten utspädning med vatten (hydratisering). Exempel på lämpliga syror äro saltsyra, svavelsyra, salpetersyra och framför allt fosforsyra. Försöken visa, att det icke är cellulosan själv, som löses utan att det först i den fasta fasen måste bildas en additionsförening mellan cellulosa och hydratiserad syra, och det är sedan denna additionsförening, som löses. Författaren fann ganska snart, att cellulosa i vanlig mening icke består av en enda kemisk individ utan av ett mycket stort antal sådana. Dessa skilja sig från varandra blott genom olika längd hos molekylen (olika antal pyranringar i ovanstående formel enl. Haworth) — man kan säga, att de tillhöra alla en och samma homologa serie i likhet med kolvätena i metanserien. Det visar sig, att ju kortare cellulosamolekylen är, desto lättare går den i lösning, desto mera utspädd med vatten kan syran vara, som skall lösa cellulosan i fråga. I ett diagram

visas sambandet mellan cellulosamolekylens längd och den mest utspädda syra, som kan lösa cellulosan i fråga. Vi kunna emellertid i detta fall ej obegränsat minska syrans utspädning med vatten och därmed stegra syrans verkan, ty vid en viss syrakoncentration, olika för olika syror, visar syran sin maximalt lösande förmåga. Denna koncentration ligger hos svavelsyran vid 65,4 %, hos saltsyran vid 39,5 %, hos fosforsyran vid 82,9 % o. s. v. Det är blott möjligt att med hjälp av syra av dessa koncentrationer lösa högmolekylär cellulosa upptill en molekylvikt av c:a 300 000. Vi kunna således fraktionera en högmolekylär cellulosa, om vi behandla den successivt med syra av stigande koncentration. Sådana fraktioneringar av högmolekylärt material ha hittills endast kunnat utföras med hjälp av Th. Svedbergs ultracentrifug — som bekant en ytterst dyrbar apparatur.

På olika sätt visas, att den additionsförening, som är upplöst i fosforsyra, har sammansättningen: $(H_3PO_4 \cdot 2H_2O \cdot C_6H_{10}O_5)_n$.

I följande avdelning användes cellulosalösningarna i mineralsyror för bestämning av molekylvikten hos olika slag av cellulosa, varvid Staudingers viskositetsmetod i modifierad form kommer till användning. Fosforsyra är det mest lämpliga lösningsmedlet, då denna syra vid vanlig temperatur ej nämnvärt nedbryter cellulosan. Flera cellulosa-estrar, såsom nitrat och acetat, framställdes. Sådana estrar äro som bekant lätta att lösa i en rad organiska lösningsmedel, och det är således förhållandevis lätt att bestämma dessa estrars molekylvikt. Den intressanta iakttagelsen gjordes, att cellulosa, upplöst i fosforsyra eller kopparhydroxidammoniak, visar samma molekyllängd som den nitrerade cellulosan, upplöst i aceton, eller den acetylerade cellulosan upplöst i kresol. Detta måste betraktas som ett starkt bevis för att cellulosan eller cellulosaderivaten i dessa lösningsmedel befinna sig i form av fria kemiska molekyler av oväntad storlek (molekylvikt = 100 000 eller större).

I sista avdelningen redogöres för försök att kinetiskt studera cellulosans sönderfall i mineralsyrelösningar. Härför har utarbetats en viskosimetrisk metod, som i sitt experimentella utförande är mycket enkel. Ur de talrika bestämningarna kan dragas viktiga slutsatser angående konstitutionen hos cellulosamolekylen. Bl. a. kan framhållas, att den s. k. nativa cellulosan innehåller bindningar av delvis annat slag än den mera nedbrutna och lågmolekylära hydratcellulosan. Det visas, att den s. k. hydratcellulosan innehåller endast ett slags bindningar, som spjälkas av mineralsyror, vilket bekräftar den ovan givna Haworth'ska cellulosaformeln.

ERIK INGELSTAM, *Die K-Spektren der schweren Elemente.* (Nova Acta Reg. Soc. Scient. Ups. Ser. IV. Vol. 10. N:o 5.) Uppsala 1937, 116 sid. Disp. i Uppsala den 6 febr. 1937. Opponenter: docent STEN VON FRIESEN och amanuens HARALD FLEMBERG.

Precisionen vid våglängdsmätningarna inom röntgenspektroskopin är, främst tack vare de SIEGBAHNska spektrometerkonstruktionerna, driven så långt, att värdet för en linjes intensitetsmaximum eller en absorptionskants »mitt» i allmänhet är känt med ett fel ej överstigande en liten bråkdel av den utsträckning, som linjen eller kanten själv har. På de senaste åren ha som bekant mycket långvågiga röntgenspektra upptäckts och undersökts med hjälp av ritsade gitter (särskilt av SIEGBAHN och medarbetare), och våg-

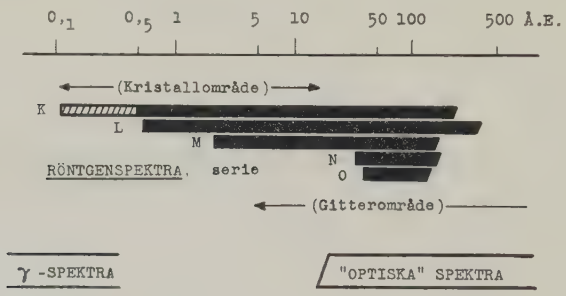


Fig. 1.

längdsvärdena i detta område ha kunnat återföras på centimetern. Inom det vanliga området däremot med de naturliga kristallernas atomgitter som spektroskopiskt hjälpmedel hänföra sig måtten till ett som norm antaget värde på ett visst kristallgitters konstant, och man använder härur definierade X-enheter (X. E.; reduktionstalet nära 1000 X. E. = 1 Å. E. = 10^{-8} cm.).

Undantag från den antydda höga precisionen finnas emellertid ännu för en del enstaka spektra, och i synnerhet har detta gällt ett helt spektralområde, *K*-spektra hos de tunga elementen eller den allra kortvågigaste röntgenstrålningen av linjestruktur. (I översikten fig. 1 är det åsyftade området streckat.) Detta har framför allt berott på, att dessa spektra äro synnerligen svåråtkomliga med de vanliga spektroskopiska metoderna: upprätthåller man kravet på att linjerna skola registreras exakt, d. v. s. utan avsevärda breddningseffekter på grund av spektrografen, blir nämligen intensiteten i de flesta fall otillräcklig.

En väsentlig förbättring i detta avseende erbjuder användningen av cylinderböjda kristallplattor som gitter (först prövat 1931; Johann, Cauchois). För det i fig. 2 tecknade fallet är kristallplattan utskuren så, att de reflekterande atomplanen stå vinkelrätt mot sidorna, och den rektangulära plattan böjes till en cylinderyta med axeln parallell med dessa plan. Enkel geometri ger vid handen, att reflexionsvillkoret enligt den bekanta Braggska lagen $n\lambda = 2d \sin \varphi$ är uppfyllt vid alla azimutala zoner av kristallen på så sätt, att en bestämd våglängd av ett genom kristallen gående strålknippe devieras och fokusseras i en och samma smala linje på en cirkulär cylinderyta med diametern = kristallradien. (Ganska stor analogi med konkavgitter och Rowlandcirkeln!) En dylik anordning, som alltså fullständigt saknar de vanliga smala spalterna hos plankristallspektrograferna, innebär ett mycket fullständigare utnyttjande av den inkommande strålningen än med dessa — intensitetsvinsten kan uppgå till hundratals gånger.

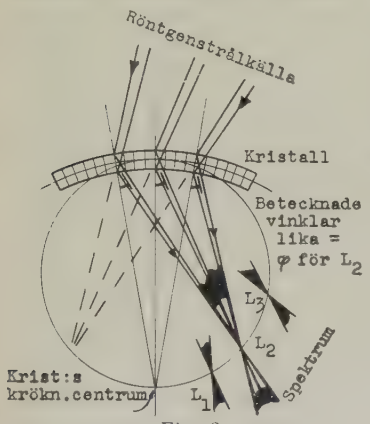


Fig. 2.

Den skisserade metoden har av denna avhandlings författare utarbetats för att med precision undersöka det nämnda kortvågiga området. Speciella anordningar och förfaringssätt ha varit nödvändiga för att säkerställa särskilt resultatet av våglängdsmätningen; för att komma upp i samma noggrannhet som i den Siegbahnska tubspektrometern måste kristallens form och egenskaper vara mycket nära ideala. Mätmetoden är relativ: de kortvågiga linjerna upptagas på fotografisk plåt i en högre ordning ($n = 2$ eller 3), och dessutom registreras på samma plåt lämpliga referenslinjer i första ordningen. Ur de uppmätta avstånden på plåten och referenslinjernas bekanta vaglängder uträknas resultaten bekvämt med interpolationsformel.

Då tändspänningen hos *K*-serien för de tyngre elementen är ganska hög, för uran 115 kilovolt, bör man som strålningskälla ha ett röntgenrör, som kan drivas vid en spänning av upp till 200 kilovolt. Dessutom måste det medge bekvämt och snabbt utbyte av strålande material på antikatoden. En dylik konstruktion har genomförts, och röret, som är över en meter långt, fungerar bra. Det kan belastas med 1 ½ kilowatt. — Även spektrografen,

bland vilkens delar kristallhållaren är den viktigaste, har konstruerats av förf. Kristallplattornas tjocklek är ung. 0,5 mm, och de äro här böjda till 1 meters radie.

Redan av Braggs lagen framgår, att man vid undersökning av kortvågig strålning för dispersionens skull bör använda kristallgitter med liten konstant *d*. Här ha tvenne för röntgenspektroskopin nya gitter använts, nämligen kvarts (0001) och topas (100) med *d* resp. 1797 och 2316 X. E.

Precisionsmätningarna inom *K*-serien med tubspektrometern fortsattes på sin tid t. o. m. element n:o 50 Sn (α-linjer vid 490 X. E.). Denna undersökning knyter vid där och omfattar elementen 48 Cd — 50 Sn (β-linjerna), 51 Sb — 60 Nd utom ädelgasen 54 X. 73 Ta — 83 Bi, 90 Th och 92 U eller våglängdsområdet 475 — 111 X. E. Sammanlagt ha våglängderna hos omkring 200 linjer precisionsbestämts. De flesta ha uppmätts i tvenne ordningar med olika referenslinjer (dessa ha varit $K\alpha_1$-linjerna hos 37 Rb — 50 Sn), varigenom noggrannheten hos deras våglängdsvärden kunnat underkastas en objektiv prövning. — Felen i de nya våglängdsvärdena ligga säkert under 0,015—0,010 X. E. Därmed har precisionen hos röntgenvåglängderna utvidgats även till detta område, och energin hos de tunga atomernas *K*-tillstånd har kunnat anges med tillfredsställande exakthet. Tidigare mätningar ha i regel haft ungefär 10 gånger större fel.

De stora dragen av dessa spektras systematik ha ju sedan länge varit bekanta; på grund av den förbättrade metodiken ha här en hel del dubblettlinjer för första gången upplösts (ej endast $\beta_1\beta_3$ utan även nästa analoga grupp $\beta_2{}^{\mathrm{I}}\beta_2{}^{\mathrm{II}}$), och vidare har spektralsystemet fullständigats med nya, svagare linjer. En särställning bland de svagare linjerna intaga de, som bero på kvadrupolstrålning (uppkommande vid vissa elektronövergångar mellan normala nivåer, endast mångfaldigt mindre sannolika än de vanliga linjernas dipolövergångar); de tvenne möjliga linjerna av sådant slag återfinnas i här upptagna spektra.

De naturliga linjebredderna, som göra anspråk på ett särskilt intresse, ha kunnat bestämmas någorlunda noggrant och i samband därmed även den linjebreddning spektrografen orsakar; den visar sig vara synnerligen måttlig.

Vårsammanträde med Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

hölls måndagen den 23 mars 1937 i Malmö och Lund. Programmet inleddes med årsmöte, förlagt till Tekniska läroverket i Malmö, vid vilket omkring 100 medlemmar närvoro. Efter behandling av års- och revisionsberättelse valdes styrelse, som fick följande sammansättning: ordf. rektor P. G. Persson, Malmö, v. ordf. rektor E. Hernqvist, Halmstad och rektor K. Parck, Eslöv, sekr. o. kassör fil. lic. Börje Svensson, Lund, bitr. sekr. o. kassör docent H. Nordström, Malmö, läroverksadjunkt T. Edqvist, Malmö, rektor H. Holmgren, Skurup, lektor A. Jönsson, Malmö, professor J. Koch, Lund, lektor A. Leide, Lund, fil. lic. Tage Larsén, Lund, professor K. Lundmark, Lund, rektor F. Montén, Malmö, professor M. Riesz, Lund, docent O. Lundquist, Lund, rektor S. Sjöberg, Lund, professor L. Smith, Lund samt lektor B. Svensson, Lund. Till revisorer utsågos läroverksadjunkt R. Nordenstedt och lektor G Arvidsson med lektor F. Olsson som suppleant. — Vid styrelsesammanträde valdes till arbetsutskott ordf., de bada vice ordförandena, sekr. samt professorerna J. Koch och L. Smith.

I omedelbar anslutning till årsmötet höll elektroingeniören vid Statens Järnvägars verkstäder i Malmö G. S. Nyblin föredrag över »Statens Järnvägars elektrifiering». Efter en kort historik redogjorde talaren för elektrifieringens nuvarande omfattning och de närmaste utvecklingsplanerna. De stora fördelarna med elektrisk drift diskuterades, och många intressanta och för åhörarna nya synpunkter framfördes. Utan att ingå på tekniska detaljer lämnade föredragshållaren en redogörelse för det i Sverige använda elektrifieringssystemet, varvid bl. a. beskrivning gavs på de elektriska lokens konstruktion och skötsel, och huru de med bestämda mellanrum genomgingo en omsorgsfull revision.

Maskiningeniör H. Westerdal lämnade en orientering över Sveriges Järnvägars huvudverkstäder i Malmö, dels av omfattningen och dels av de använda arbetsmetoderna, varefter verkstäderna vid Bulltofta besöktes. Under sakkunnig ledning besagos, gruppvis, vagnverkstäderna och lokverkstaden. I den förra reparerades och reviderades huvudsakligen tredjeklassvagnar, i den senare elektrolok. Deltagarna fingo ett mycket starkt intryck

av den grundlighet, som kännetecknar arbetet, och av den långt drivna rationaliseringen. — Med extratåg fördes deltagarna från verkstäderna till den inom bangårdsområdet belägna omformarestationen, vilken besågs, varefter tåget fortsatte fram till Malmö Central.

Senare på dagen fortsatte sammanträdet på Lunds Universitets Fysiska Institution, där docent O. Lundquist förevisade radioaktivt sönderfall med Wilsonkammare och Geigers spetskammare (se artikel i detta häfte). Härefter vidtog demonstration av fysikalisk undervisningsmateriel från A. B. P. A. Nordstedt och Söner, Stockholm. Åtta olika försöksuppställningar förevisades gruppvis av institutionens tjänstemän.

Senare på kvällen vidtog supé på Akademiska Föreningens restaurang.

Tisdagsprogrammet var helt förlagt till Malmö. På förmiddagen besågos fysiska, kemiska, elektrotekniska och maskintekniska laboratorierna vid Tekniska Läroverket.

Efter lunch funnos tvenne alternativ att välja mellan. Alternativ A upptog dels besök vid syrgasfabriken »Flytande luft», dels visning av A. B. Sydsvenska Krafts hypermoderna ångcentral, åtföljd av en kortare teoretisk orientering. Alternativ B:s program, förlagt till Limhamn, upptog besök på A. B. Skånska cements kalkbrott och cementfabrik samt besök på Nordiska ackumulatorfabriken, som även är kombinerad med en bakelitfabrik. — I Limhamn mötte Skånska cement med extratåg, som förde besökarne till kalkbrottet, brytningen besågs och förbearbetningen av kalkstenen studerades. Extrataget återförde sedan besökarna till fabrikerna i Limhamn, där de olika stadierna i cementframställningen följdes från början till slut. Här liksom i ackumulator- och bakelitfabriken blevo deltagarna omhändertagna på bästa sätt och allt hade gjorts för att demonstrationerna skulle bli så givande som möjligt.

Under nästkommande hösttermin planeras ett sammanträde till den 30 oktober, vilket förlägges till Observatoriet i Lund, och som bland annat kommer att speciellt upptaga föredrag, övningar och demonstrationer i astronomi under ledning av prof. K. Lundmark, assisterad av Observatoriets tjänstemän.

Under vårterminen 1938 bliva föreningens medlemmar i tillfälle att bese den nya Kemiska Institutionen i Lund, och i samband därmed planeras Naturvetenskapliga dagar i likhet med dem som höllos på våren 1935.

Börje Svensson.

Pristävlan utlyst av Fornanderska Fonden.

Under de senare åren ha offentliggjorts ett betydande antal populära framställningar över de naturvetenskapliga upptäckterna och teorierna. Härigenom har den bildningssökande allmänheten säkerligen kunnat skaffa sig vissa intryck av de ifrågavarande vetenskapernas nyare resultat och principiella ståndpunkter. Som en allmän regel gäller dock, att de populariserande framställningar som ha framkomit, icke i lika hög grad kunnat giva ett allmänfattligt intryck av på vilket sätt naturforskarna ha nått fram till dessa resultat och ståndpunkter samt vilket oerhört uppbåd av arbete, snille och tålmodighet, som har föregått resultaten. Man kan tvärtom befara, att de populariserande framställningarnas lättfattlighet i flera fall kan framkalla det missförståndet, att problemen egentligen icke alls äro så svåra, som de utgivas för att vara, utan att det hela snarast innebär en lek för vetenskapsmännen, och att deras långvariga utbildning, de dyrbara instituten och instrumenten egentligen är en icke helt nödvändig lyx i vårt offentliga liv.

För att i sin mån motarbeta uppkomsten av missförstånd av sådant slag har den Fornanderska Fonden vid Lunds Universitet beslutat att utfästa ett pris av Ettusen (1 000: —) svenska kronor för den bästa populära skrift, som befinnes tillfredsställande och som uppfyller nedanstående villkor:

a) Den skall ge en allmänfattlig och åskådlig redogörelse för det forskningsarbete, som ligger till grund för någon av naturforskningens viktigaste upptäckter i nutiden.
b) Den skall avfattas på danska, norska eller svenska språket och får icke omfatta mera än 100 maskinskrivna foliosidor.
c) Den skall inlämnas i trenne maskinskrivna exemplar till Fornanderska Fonden, Lunds Universitet, senast den 1 mars 1938.
d) Den får endast betecknas med ett motto eller signatur, under det att författarens namn angives i ett bilagt slutet konvolut, som betecknas med samma motto eller signatur som avhandlingen.
e) Författaren skall vara villig att publicera sin avhandling, såvitt det kan göras utan kostnad för honom. Han skall i det ovannämnda konvolutet lämna sitt tillstånd till publikation. Den eventuella vinsten av offentliggörandet tillfaller författaren.

Tävlingsskrifterna komma att bedömas av Fondens styrelse med eventuellt bistånd av särskilt tillkallade sakkunniga som utses av Fondens styrelse.

Köpenhamn, Upsala och Lund den 15 Februari 1937.

The Svedberg.	*Knut Lundmark.*	*Jørgen Jørgensen.*
Professor vid Upsalas Universitet.	Professor vid Lunds Universitet.	Professor vid Københavns Universitet.

Föredrag under våren 1937 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. lic. E. Berg.

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, se detta häfte sid. 133.

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: doc. O. Stelling, Något om moderna metoder för avhärdning av vatten ($^{26}/_{2}$); prof. L. Smith, Några destillationsuppsatser i laboratoriepraxis ($^{26}/_{2}$); amanuens B. Ahdell, Mono- och dikarbonsyrors dissociation i alkalikloridlösningar ($^{18}/_{3}$); amanuens K. E. Thomé, Mått, tal och vikt i gångna tiders kemi, ref. ($^{18}/_{3}$). Vid sammanträde i Köpenhamn ($^{24}/_{4}$) tillsammans med Kemisk Forening: fil. lic. E. Eftring, Några klorkolvätens bildningsenergi; fil. lic. G. Holst, Redoxpotentialer för en serie substituerade hydrasindiazosulfonater; Dr. phil. S. Veidel, Enzymatisk Hydrolyse af Glukosider; Mag. sc. J. Bjerrum, Undersøgelser over Ammindannelsen i ammoniakaliske Litium-, Calcium- og Magniumopløsninger. – Prof. L. Zechmeister, (Pecs), Neuere Adsorptionsmethodik und einige biochemische Anwendungen ($^{14}/_{5}$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. A. Pleijel.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: assistent C. H. Johansson, Kristaller med periodiska gitterförskjutningar ($^{10}/_{3}$); lektor T. E. Aurén, Sambandet mellan belysning och energi i solstrålningen (tillsammans med Sv. Geofysiska Föreningen $^{18}/_{3}$); prof. C. Størmer, Oslo, Teori og numerisk beregning av elektronbaner med anvendelse på den kosmiske stråling ($^{26}/_{4}$) och Organisation av nordlysfotografering fra et nett av stationer (tillsammans med Sv. Geof. Fören. $^{27}/_{4}$); Prof. H. Verleger, Phys.-technische Reichsanstalt, Berlin, Ueber die Struktur einiger einfacher, mehratomiger Moleküle ($^{11}/_{5}$); Dr. Robert Millikan, Pasadena California, Some Recent Discoveries in Physics and their General Significance (enl. inbjudan av Sverige Amerika Stiftelsen $^{19}/_{5}$); prof. G. Ising, Ett par instrumentfrågor rörande gravimetri och magnetometri ($^{1}/_{6}$).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, ordf. rektor B. Söderborg, sekr. fil. dr. S. Åstrand.

Föredrag: faktor J. Möller, Orientering i reproduktionsteknik och klichétillverkning med förevisning av Esseltes klichéanstalt och tryckerier ($^{26}/_{4}$). Om årsmötet i jan. 1937 se marsh. sid. 42.

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. E. Brunius.

Föredrag: prof. A. Butenandt, Berlin, Chemische Untersuchungen zur physiologischen Spezifität in der Gruppe der Keimdrüsenhormone (tillsammans med Kemistsamfundet $^{16}/_{4}$); prof. The Svedberg, Studiet av högmolekylära ämnen medelst ultracentifugering ($^{22}/_{3}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Gunnar Kellström, v. ordf. docent Hannes Alfvén.

Föredrag: docent B. Edlén, Extremt ultravioletta spektra och tydningen av vissa stjärn- och nebulosaspektra ($^{8}/_{2}$); prof. H. Norinder, Demonstration av den experimentella utrustningen vid institutet för högspänningsforskning, Husbyborg ($^{21}/_{4}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. docent P. Nylén, sekr. docent A. Fredga.

Föredrag: docent A. Fredga, Om metylen-bis-tiomjölksyra ($^{29}/_{1}$); docent A. Tiselius, Elektroforetisk analys ($^{26}/_{2}$); prof. G. Hägg, Fasta lösningar ($^{9}/_{4}$); docent R. Nilsson, Jäsningsmekanismen i den levande jästcellen ($^{13}/_{5}$).

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XVIII, 1937: 1—2.

Ur innehållet: B. Edlén, Om tydningen av de ljusa linjerna i gasnebulosornas och Wolf-Rayet-stjärnornas spektra; S. Asklöf, Parallaxforskningen 100 år; Å. Wallenquist, Moderna strömningar inom dubbelstjärneforskningen; A. Oldeberg, Några märkliga, Statens historiska museum tillhöriga astronomiska och matematiska instrument; H. Geitz, Den dagliga rörelsen sedd som stereoskopisk djuprörelse; H. Mortensen, Rundetorn i Köpenhamn.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1937: 1—2.

Ur innehållet: A. Kahrstedt, De jordnære Asteroiders Betydning for Videnskaben; W. Gyllenberg, Några nyare undersökningar över rörliga stjärnhopar; J. P. Møller, Kort til Bestemmelse af Maane-Formørkelsers Synlighed; M. L. Humason, Super-Novae; E. S., Astronomiske Regneeksempler; Iagttagelser af foranderlige Stjerner. — H. Petersen, Om nye Metoder for Vejrforudsigelse; P. Guthnick, Et astronomisk Standardverk; E. S., Et finsk astronomisk Kæmpeværk afsluttet; J. P. Møller, Polarisationsfiltre; A. V. Nielsen, Periodeforandringer hos langperiodiske Cepheider.

(Forts. å sid. 152.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

901) *c_0, c_1, c_2, ... äro cirklar, som alla ha sina medelpunkter på kurvan $y = kx^2$ $(k > 0)$. Alla tangera de positiva x-axeln, varjämte varje cirkel (c_n) tangerar den föregående (c_{n-1}) och befinner sig till vänster om denna. Sök radien i c_n, om radien i c_0 är r_0.*

Stig Comét.

902) *På en cirkelperiferi fixeras en viss omloppsriktning såsom positiv. A_0 och A_1 äro två givna punkter på periferien. Successivt definieras sedan (för $n = 2, 3, \ldots$) A_n såsom mittpunkten på den båge, som i positiv led går från A_{n-1} till A_{n-2}. Visa, att punkterna A_n, då n växer över alla gränser, närma sig vissa lägen, och angiv dessa lägen.*

Stig Comét.

903) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} x^3 + ryz^2 &= a \\ y^3 + sx^2z &= b \\ rsz^3 - xy^2 &= c \end{aligned}\right\}$$

Ö.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

904) Lös ekv.-syst. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} + x + y &= 5 \\ \frac{y}{x} - x - y &= -2{,}5 \end{aligned}\right\}$. Svar: $\frac{x \mid 2 \mid 1{,}5}{y \mid 1 \mid 3}$.

905) Beräkna värdet av $\sqrt{\frac{a+2b}{2a+b}} + \sqrt{\frac{2a+b}{a+2b}}$, då a och b äro rötter till ekvationen $9x^2 - 3x = 1$.

Svar: 3.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 904—907, 917 äro insända av *S. B.*, 908, 921 av *B. N.*, 909—916, 918—920 av *X.*

906) Bevisa formeln

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

907) Lös ekvationen $2\cos x\cos 2x = \cos^3 x + \sin^3 x$.

Svar: $135° + \text{n.}\,180°$; $31°{,}72 + \text{n.}\,90°$.

908) Visa, att i varje triangel ABC är $\dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \dfrac{\sin 2C}{\sin 2B}$.

909) Om man viker in hörnen i en triangel av papper så, att vinkelspetsarna sammanfalla i den inskrivna cirkelns medelpunkt, återstå tre obetäckta trianglar. Visa, att ytorna av dessa trianglar äro proportionella mot kvadraterna på den ursprungliga triangelns sidor.

910) Bissektriserna till de spetsiga vinklarna B och C i den rätvinkliga triangeln ABC råka motstående kateter i D och E resp. Hur långa äro kateterna, om $AD = 25$ cm och $AE = 18$ cm?

Svar: 90 och 37,5 cm.

911) I tetraedern $ABCD$ är $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $AD = 9$ cm, $BC = 2$ cm, $BD = 7$ cm och kantvinkeln längs $AB = 90°$. Beräkna längden av CD.

Svar: $5{,}1\sqrt{2} = 7{,}213$ cm.

912) Om tetraedern $ABCD$ vet man endast, att triangeln ABC har en yta av 6 cm², triangeln ABD en yta av 10 cm² samt det plana snitt genom AB, som halverar tetraederns volym, en yta av 7 cm². Beräkna kantvinkeln längs AB.

Svar: 60°.

913) Två klotytor tangera varandra utvändigt i O. Två klotytor med centrum i O och radierna a och b begränsa jämte de förstnämnda en ringformig kropp. Hur stor är radien i en klotyta med centrum i O, som delar denna rings volym i två lika delar?

Svar: $\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}$.

914) Visa, att det största klotsegment, som får plats i en given liksidig kon under förutsättning att segmentets plana yta ligger i konens basyta, är ett halvklot.

915) Genom punkten (4; 2) dragas två mot varandra vinkelräta linjer. Den ena skär positiva x-axeln i A, den andra positiva

y-axeln i B. Bestäm maximum för triangelytan AOB, där O är origo.

Svar: 6,25 ytenheter.

916) Från en punkt P inom triangeln (0; 0), (15; 0), (0; 20) fällas normaler mot triangelns sidor. Bestäm koordinaterna för P så, att dessa normaler bliva proportionella mot resp. triangelsidor, och visa, att P är mittpunkten av höjden mot hypotenusan.

Svar: (3,6; 4,8).

917) Medelpunkten till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x \cos v - 2y \sin v = 0$ faller på linjen $x + 3y = 3$; beräkna vinkeln v.

Svar: $90°$ eller $53°{,}13 + n \cdot 360°$.

918) Diskutera kurvan $y = \sqrt{1 + \sin x}$.

919) Bestäm funktionen $f(x)$, om $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ och $f(x) = 1$ för $x = \frac{\pi}{8}$.

Svar: $f(x) = 3 - 2 \cot 2x$.

920) Kurvorna $y = x^2$ och $y = ax^2 + 3x + b$ skära varandra under rät vinkel i båda skärningspunkterna. Beräkna härav konstanterna a och b.

Svar: $a = -1$; $b = 0{,}5$.

921) I kvadraten $ABCD$ inskrives en vid Q rätvinklig triangel PQR så, att P faller i mittpunkten av AB, Q på BC och R på CD. Sök triangelytans maximi- och minimivärde. Kvadratens sida $= 2a$.

Svar: Max. $= a^2$ för $BQ = a$ (och 0); min. $= \frac{25a^2}{27}$ för $BQ = \frac{a}{3}$ (samt min. $= 0$ för $BQ = 2a$).

Lösningar till uppg. 864—866.

864) *Visa, att*,

$$\left[\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{[a_1, a_2, b_1, b_2]}, \ldots \frac{a_ib_k - a_kb_i}{[a_i, a_k, b_i, b_k]}, \ldots \frac{a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}}{[a_{n-1}, a_n, b_{n-1}, b_n]}\right] =$$

$$\frac{[a_1b_2 - a_2b_1, \ldots a_ib_k - a_kb_i, \ldots a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}]}{[a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n]},$$ *där* $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ *äro hela tal och parenteserna beteckna största gemensamma divisorn.* *Erik Berg.*

Sätt $[a_1b_2 - a_2b_1, \ldots, a_ib_k - a_kb_i, \ldots, a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}] = d_1$, $[a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n] = d_2$ och $\left[\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{[a_1, a_2, b_1, b_2]}, \ldots \frac{a_ib_k - a_kb_i}{[a_i, a_k, b_i, b_k]}, \ldots \frac{a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}}{[a_{n-1}, a_n, b_{n-1}, b_n]}\right] = d_3$. Eftersom $d_2/[a_i, a_k, b_i, b_k]$ för $i, k = 1, 2, \ldots n$, så är $\frac{d_1}{d_2} \geqq d_3$. För att bevisa satsen antaga vi, att $\frac{d_1}{d_2}$ är delbart med en viss potens av ett primtal p. Då skall detta också gälla om d_3. Antag p^α/d_1, men $p^{\alpha+1} \nmid d_1$ (1) och p^β/d_2, men $p^{\beta+1} \nmid d_2$ (2); $\frac{d_1}{d_2}$ är alltså delbart med $p^{\alpha-\beta}$. Enligt (2) finnes ett a_i eller b_i, som är delbart med p^β men ej med högre potenser av p. Antag detta gäller för a_r, alltså p^β/a_r, men $p^{\beta+1} \nmid a_r$ (2'). Man har $a_i(a_r b_k - a_k b_r) + a_k(a_i b_r - a_r b_i) = a_r(a_i b_k - a_k b_i)$ (3). Om nu $p^\gamma/[a_i, a_k, b_i, b_k]$, men $p^{\gamma+1} \nmid [a_i, a_k, b_i, b_k]$ (4), så erhålles enligt (1) och (4) och ur identiteten (3): $p^{\alpha+\gamma}/a_r(a_i b_k - a_k b_i)$ och alltså enligt (2') $p^{\alpha+\gamma-\beta}/(a_i b_k - a_k b_i)$ och enligt (4):

$$p^{\alpha-\beta} \left| \frac{a_i b_k - a_k b_i}{[a_i, a_k, b_i, b_k]} \right.$$

. Alltså är även d_3 delbart med $p^{\alpha-\beta}$.

Erik Berg.

865) *I ett rätvinkligt koordinatsystem är x-axeln den gemensamma huvudaxeln för linserna i ett system, som avbildar enligt den elementära teorien. Vi betrakta lineära föremål, vinkelräta mot x-axeln. Ett sådant på $x = 0$ avbildas i naturlig storlek, men upp- och nedvänt på $x = 7$; ett föremål på $x = 2$ avbildas rättvänt och lika stort på $x = 4$.*

1:o Var ligga föremål och bild, då förstoringen är m : n?

2:o Var ligga föremål och bild, då skillnaden mellan deras abscissor äro a?

3:o Karaktärisera primära strålar, som äro parallella med tillhörande sekundära. *X.*

Om $(x; y)$ är en primär punkt (föremål), betecknas tillhörande sekundära punkt (bild) med $(\bar{x}; \bar{y})$. En rät linje $(s) : Y = kX + l$ (primär stråle) går genom punkterna $(0; l)$ och $(2; 2k + l)$. Tillhörande sekundära linje $(\bar{s})$ går alltså genom $(7; -l)$ och $(4; 2k + l)$. Dess ekvation är därför $(\bar{s}) : Y + l = -\frac{2k + 2l}{3}(X - 7)$. Varje (s) genom $(x; y)$ motsvaras av en linje $(\bar{s})$ genom $(\bar{x}; \bar{y})$. Då k och l

kunna anta godtyckliga, av x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ oberoende värden, måste för systemet $y = kx + l$ och $-3\bar{y} = k(2\bar{x} - 14) + l(2\bar{x} - 11)$ gälla följande ekvationer, som definiera den avbildning, som linssystemet ger:

$$-\frac{3\bar{y}}{y} = \frac{2\bar{x} - 14}{x} = \frac{2\bar{x} - 11}{1}. \qquad (1)$$

(Man kunde annars lösa k (och l) som funktion av koordinaterna.)

1:o. Sätta vi $\frac{\bar{y}}{y} = \frac{m}{n}$, fås av (1) $\bar{x} = 5{,}5 - \frac{3m}{2n}$ och $x = \frac{m+n}{m}$.

(Specialfall: För $m = n$ blir $x = 2$, $\bar{x} = 4$ och för $m = -n$ blir $x = 0$, $\bar{x} = 7$.)

2:o. Insätta vi i (1) $\bar{x} = x + a$, fås $4x = 13 - 2a \pm \sqrt{4a^2 - 36a + 57}$, varav $a > 4{,}5 + \sqrt{6}$ eller $a < 4{,}5 - \sqrt{6}$. För $a = 0$ fås $x = \frac{13 \pm \sqrt{57}}{4}$. Tillhörande förstoring är $\frac{\bar{y}}{y} = \frac{11 - 2x}{3} = \frac{9 \mp \sqrt{57}}{6}$.

3:o $k = -\frac{2k + 2l}{3}$ ger $l = -\frac{5k}{2}$. Ekv. för linjen (s) blir $Y = k(X - 2{,}5)$ och för den med (s) parallella $(\bar{s})$: $Y - \frac{5k}{2} = k(X - 7)$ eller $Y = k(X - 4{,}5)$. Linjerna (s) och $(\bar{s})$ skola alltså gå genom resp. (2,5; 0) och (4,5; 0). *X.*

866) *I ekvationen $y = x^3 + ax^2 + bx$ äro a och b positiva storheter, underkastade villkoret $a + b \leqq 6$. Huru stor är sannolikheten, att funktionskurvan saknar maximi- eller minimipunkt?*

C.-E. Fröberg.

Av $y' = 3x^2 + 2ax + b$ erhålles villkoret $a^2 \leqq 3b$. Upprita i ett rätvinkligt axelsystem linjen $x + y = 6$. Punkterna $(x; y)$ i den triangel, som begränsas av nämnda linje och axlarna, representera alla möjliga kombinationer $(a; b)$. Uppritas vidare parabeln $x^2 = -3y$, bli alla punkter $(x; y)$ på parabelns konkava sida möjliga fall för villkoret $a^2 \leqq 3b$.

Triangelytan (= 18 ytenh.) representerar alla möjliga fall och den av parabeln, y-axeln och $x + y = 6$ begränsade ytan alla gynnsamma fall. Då den sistnämnda ytan = 10,5 enh., blir svaret $\frac{7}{12}$.

S. L.

Även löst av *E-d. Smn.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

April 1937.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.[1]

1. I en rätvinklig triangel är hypotenusan 5 cm och summan av kateterna 7 cm. Hur stora äro kateterna och triangelns vinklar?
2. Lös ekvationssystemet

$$\frac{x-3}{8-y}+\frac{y-8}{x-3}=\frac{16}{15}; \quad x+y=13.$$

3. I triangeln ABC är $AB=2$ m och $AC=3$ m. Vinkeln A:s bissektris råkar BC i D. Från D är, parallellt med AB, dragen en linje DE, som råkar AC i E. Hur stor är triangeln AED i förhållande till triangeln ABC?
4. Genom att i den geometriska serien $\frac{5}{32}, \frac{5}{2}, 40 \ldots$. mellan första och andra termen införa ett visst antal nya termer, vilkas summa är $2\frac{3}{16}$, vill man bilda en ny geometrisk serie. Hur många och vilka nya termer skola införas?
5. En regelbunden 12-hörning och en regelbunden 10-hörning med lika stora sidor äro givna. Beräkna förhållandet mellan deras ytor.
6. Ett lån på 20 000 kr. upptogs den 31 dec. 1936 och skall amorteras med 2 500 kr. vid varje års slut, första gången den 31 dec. 1939. Hur mycket återstår av lånet den 31 dec. 1948, sedan amorteringen denna dag ägt rum? Räntefot 4 %.
7. I en triangel är den minsta sidan 28 cm. De från ändpunkterna av denna sida utgående bissektriserna skära de två övriga sidorna så, att skillnaden mellan de båda delarna av den ena sidan är $4\frac{2}{3}$ cm och skillnaden mellan de båda delarna av den andra sidan är 7 cm. Beräkna dessa två sidors längder.
8. I en triangel ABC är vinkeln A rät, sidan AB är 35 cm och sidan AC 12 cm. Den inskrivna cirkeln tangerar AB i D. Sök längden av den mindre av de bågar, i vilka en rät linje från C till D delar den inskrivna cirkelns omkrets.

[1] Fullständiga lösningar till matematik- och fysikuppgifterna återfinnas i Svenska Dagbladet för den 4, 6 och 11 april 1937.

Resultat: 1. 3 cm och 4 cm; 36°,87 och 53°,13. 2. $x_1 = 8$ och $y_1 = 5$; $x_2 = 3\frac{3}{4}$ och $y_2 = 9\frac{1}{4}$. 3. $\frac{6}{25}$. 4. Tre termer: $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$ och $\frac{5}{4}$. (*Anm.* Då man för lösningen ej behöver känna talet 40, ej heller att de givna talen bilda geometrisk serie, borde första meningen ha haft lydelsen: »Inpassa mellan talen $\frac{5}{32}$ och $\frac{5}{2}$ o. s. v. . . . .«) 5. 1,455. 6. 2 005 kr. (*Anm.* Uppgiftens »amortering» skall utbytas mot »annuitet»; det är ju av största vikt, att dessa begrepp ej förblandas.) 7. 35 cm och 42 cm. 8. 11,76 cm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En rät kon, vars toppvinkel är 49°40′, är omskriven kring en sfär. Vad är förhållandet mellan konens och sfärens volymer?
2. Ekvationssystemet

$$2y - 3x^2 - 1 = 0$$
$$3xy + 12x - 10y + 2 = 0$$

har lösningen $x = 1$; $y = 2$. Bestäm de övriga lösningarna.

3. Beräkna koordinaterna för skärningspunkten mellan linjen $3x + 2y - 8 = 0$ och den normal till denna linje, som går genom skärningspunkten mellan linjerna $x - 4y + 16 = 0$ och $3x - 2y - 28 = 0$.
4. L och M äro två mot varandra vinkelräta linjer, som skära varandra i O. Från en punkt A på L drages en rät linje till B på M, så att vinkeln $OAB = v$; från B drages en linje till C på L, så att vinkeln $OBC = v$; från C drages en linje till D på M, så att vinkeln $OCD = v$ o. s. v. i oändlighet. Bestäm vinkeln v, så att den brutna linjen $ABCD$ ... blir dubbelt så lång som OA.
5. Från en punkt P synas spetsarna av en flaggstång A och ett torn B i rät linje under höjdvinkeln 13°,56. Om man härifrån avlägsnar sig 50 m i riktning från tornet till en punkt Q med samma höjdnivå som P och belägen i samma plan som A, B och P, synas spetsarna av A och B under höjdvinklarna 6°,38 resp. 12°,52. Beräkna härav avståndet mellan flaggstången och tornet.
6. En person vill disponera ett kapital, som är placerat mot 5 % ränta på ränta, på sådant sätt att han vid slutet av varje år tar ut sammanlagt a kronor, varvid kapitalet beräknas räcka

precis 10 år. Efter slutet av 5:e året sjunker emellertid räntefoten till 4 %. Till vilket belopp måste nu de årliga uttagen minskas, för att kapitalet skall räcka så länge som från början avsetts?

7. Lös ekvationssystemet

$$\sin 3x + \sin 3y = 1\tfrac{3}{8},$$
$$\sin x + \sin y = \tfrac{1}{2}.$$

8. Två räta linjer skära varandra i punkten A under 40° vinkel. På den ena av linjerna ligga på samma sida om A två punkter B och C, så att $AB = 16$ cm, $AC = 25$ cm. Från vilken punkt på den andra linjen ser man avståndet BC under största möjliga synvinkel, och huru stor är denna?

Resultat: **1.** 2,069. **2.** $x_1 = 2$; $y_1 = 6\frac{1}{2}$ och $x_2 = \frac{1}{3}$; $y_2 = \frac{2}{3}$. **3.** $x = 2\frac{10}{13}$; $y = -\frac{2}{13}$. **4.** 24°,29. **5.** 537 m. **6.** 0,973 *a*.

7.

x	14°,48	14°,48	165°,52	165°,52	+ m.	360°
y	14°,48	165°,52	14°,48	165°,52	+ n.	360°

8. Löses geometriskt så:

Lägg genom B och C en cirkel, som tangerar den andra linjen. Två dylika finnas (den ena tangerar förlängningen); tangeringspunkterna äro maximipunkter för synvinkeln. Cirkeln med den mindre radien ger det större maximivärdet; dess tangeringspunkt ligger 20 cm från A. Synvinkeln härifrån är 33°,96. — En analytisk metod med derivering av en tangensfunktion återfinnes i Svenska Dagbladet för den 4 april 1937. Den ligger emellertid utom ramen för den »allmänna kursen».

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Två trianglar, ABC och $A_1B_1C_1$, äro givna. Sidorna BC och B_1C_1 äro lika stora. Triangeln ABC är spetsvinklig, $A_1B_1C_1$ trubbvinklig, och vinklarna A och A_1 äro supplementvinklar. Vinklarna B och B_1 äro komplementvinklar. Visa, att även vinklarna C och C_1 äro komplementvinklar och att förhållandet mellan ytan av triangeln $A_1B_1C_1$ och ytan av triangeln ABC är $\cot B \cot C$.

2. Bestäm konstanterna a, b och c, så att funktionen $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + c$ får ett maximum = 4 för $x = 30°$ och ett minimum = 3 för $x = 90°$.

3. I en punkt P på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ drages en diameter. Därjämte drages motsvarande konjugatdiameter, vilken råkar kurvan i en punkt Q. Tangenten i P skär abscissaxeln i punkten A, och tangenten i Q skär ordinataxeln i punkten B. O är ellipsens centrum. Visa, att $\triangle AOP = \triangle BOQ$.
4. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna A $(-1, 0)$, B $(3, 0)$, C $(6, 8)$. På AC mellan A och C tages punkten P så, att $AP : PC = 1 : 3$. På CB:s förlängning tages punkten Q så, att $QB : QC = 1 : 3$. En parabel har sin axel parallell med x-axeln och går genom punkterna C, P, Q. Bestäm parabelns ekvation.
5. På en rörlig korda OP i en parabel med toppen O tages en punkt Q, som ligger på samma avstånd från P och från skärningspunkten mellan parabelns axel och tangenten i punkten P. Sök orten för Q.
6. Konstruera i huvuddrag kurvan $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ och angiv särskilt, dels de punkter, som ligga på x-axeln, och ekvationerna för tangenterna i dessa punkter, dels kurvans maximi- och minimipunkter.

Resultat: **2.** $a = 2$; $b = 4$; $c = 1$. (En fullständig behandling kräver, att man även visar, att dessa värden giva max. resp. min. för $x = 30°$ och $x = 90°$.) **4.** $\left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = \frac{48}{7}\left(x + \frac{195}{112}\right)$. **5.** Orten är en ellips. Om F är parabelns brännpunkt ($OF = a$), sammanfaller ellipsens mindre axel med OF, och den större är $a\sqrt{2}$; Q genomlöper hela ellipsen utom O och F. **6.** På x-axeln ligga punkterna $(-3; 0)$, $(0; 0)$ och $(+3; 0)$; den första och sista av dessa äro slutpunkter. Tangenterna i dessa punkter äro resp.: $x = -3$; $y = x\sqrt{3}$ och $x = +3$. Min. i $(-\sqrt{6}; -\sqrt[4]{108})$, max. i $(+\sqrt{6}; +\sqrt[4]{108})$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En ballong befinner sig i stigning med en vertikal hastighet av 5 m/sek. Samtidigt rör den sig på grund av vinden 15 m/sek i horisontell riktning. En kula släppes från ballongkorgen, då den befinner sig på 500 m höjd över ett horisontellt fält. Hur långt förflyttar sig ballongen i horisontell led under den tid kulan behöver för att nå marken? Luftmotståndet mot kulans rörelse försummas.

2. Ett hjul, som väger 1,4 kg, kan utan nämnvärd friktion rotera kring en horisontell axel. Vid hjulet är fäst ett lätt, tillräckligt starkt snöre, som ligger runt hjulets periferi och omsluter hjulet några varv. Varje varv kan anses vara cirkulärt med radien 12 cm. Snöret uppbär en vikt av storleken 0,1 kg, som från början hindras att falla genom att snöret fasthålles. Släppes snöret, komma både vikten och hjulet i rörelse. Hur många varv i minuten gör hjulet i det ögonblick, då vikten sänkt sig 100 cm? Hjulets form är sådan, att man kan anse dess massa likformigt fördelad över en cylindermantel med radien 12 cm.
3. I en ångpanna är temperaturen 199° C. I pannan inmatas per timme 1,5 ton vatten av 18° C. Den därvid alstrade mättade ångan överhettas därpå till 360° C. Beräkna den mängd kol, som per timme måste förbrännas i eldstaden, om 80 % av kolets förbränningsvärme tillgodogöres. När 1 kg kol förbrännes, alstras en värmemängd av 7 200 kcal. Vattnets ångbildningsvärme vid 199° C är 464 kcal per kg. För vattnets spec. värme kan det vanliga värdet användas; för vattenångans spec. värme användes värdet 0,47 kcal per kg och grad.
4. På samma höjd över ett bord äro tvenne lika beskaffade telefoner placerade på ett avstånd från varandra av 8,0 dm, räknat från membranernas mittpunkter. Telefonerna äro i serie inkopplade i en växelströmsledning och svänga i takt med varandra. En person håller ena örat i jämnhöjd med telefonerna och vänt mot dessa. Örat befinner sig på mittpunktsnormalen till sammanbindningslinjen mellan telefonerna, 20,0 dm från nämnda linje. Den ena telefonen står under hela försöket kvar i orubbat läge, medan den andra långsamt förflyttas längs bordet bort ifrån den lyssnande personen i en riktning, som är vinkelrät mot den ursprungliga sammanbindningslinjen mellan telefonerna. Då förflyttningen uppgår till 1,4 dm, hör personen ett första tonminimum. Vilket ungefärligt värde på tonens svängningstal erhålles härav? Ljudets fortplantningshastighet i luft är 340 m/sek.
5. En iskristall har prismatisk byggnad; huvudsnittet bildar en regelbunden sexhörning, i vilken *A*, *B*, *C* och *D* äro på varandra följande hörn. En ljusstråle inträder i prismat genom sidan *AB* och lämnar detsamma under minimumdeviation genom sidan *CD*. Beräkna vinkeln mellan den infallande och den utgående strålen. Brytningsindex för is är 1,31.
6. En kopparcylinder har två urborrningar, den ena så vid, att man kunnat införa ett glasrör med litet radiumbromid, den

andra jämförelsevis trång. I en annan likadan kopparcylinder har man i den vidare urborrningen en liten motståndsrulle å 0,35 ohm. I de båda trängre urborrningarna befinna sig de båda lödställena av ett termoelement, som är slutet genom en galvanometer. Motståndsrullen ingår i en strömkrets, där strömstyrkan med hjälp av ett skjutmotstånd kan varieras. När strömstyrkan i denna krets är 0,137 ampère, är den till termoelemetet kopplade galvanometern strömlös. Beräkna, huru mycket värme 1 g radium utvecklar per timme, då man vet, att radiumsaltet innehöll 43 mg radium. Båda strömkretsarna äro elektriskt isolerade från kopparcylindrarna. Dessa äro uppställda i sådan omgivning, att de kunna anses förlora lika mycket värme till omgivningen, när de ha samma temperatur.

7. Inre motståndet hos ett element kan bestämmas enligt följande metod. Elementets poler, A och D, förenas genom tre seriekopplade motstånd, $AB = r_1$, $BC = r_2$ och $CD = r_3$. Mellan B och D inkopplas en grenledning, innehållande en voltmeter med mycket stort motstånd. Motstånden r_1, r_2 och r_3 avpassas så, att voltmeterns utslag ej ändras, om punkten C bringas i kontakt med A. Visa att det sökta motståndet då är lika med $\frac{r_1 r_3}{r_2}$.

8. En kort kompassnål är i jämvikt, då den pekar rakt mot norr. Rakt väster om nålen placeras en stavmagnet med längdriktningen väst—ost i en zinklåda, fylld med nollgradigt vatten. Nålen gör då ett utslag av 62°,7 ur sitt jämviktsläge. Rakt öster om kompassnålen, i förlängningen av den förra stavmagneten, placeras därefter en annan stavmagnet i sådant läge, att utslaget i fråga försvinner. Om nu, utan att förövrigt något ändras, magneten i zinklådan omgives med vatten av temperaturen 90° C, gör kompassnålen ånyo ett utslag, denna gång på 4°,8, angivande en minskning av magnetens polstyrka. Beräkna polstyrkans genomsnittliga ändring per grad temperaturstegring, uttryckt som bråkdel av polstyrkan vid 0° C. Magnetens polavstånd kan anses vara oberoende av temperaturen.

Resultat: **1.** 159 m. **2.** 91,0 varv per min. **3.** 188 kg. **4.** 1235. **5.** 21°,8. **6.** 132,0 cal. **7.** Metod enl. MANCE, se närmare i nästa häfte (sept. 1937). **8.** 0,00048(2).

Realexamen V. T. 1937.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{1}{3}(x+6)+\frac{30+x}{9}-\frac{9-x}{\frac{3}{8}}=0.$$

2. En handlande sålde varor för 360 kr. och förtjänade därvid 20 %. Själv hade han vid inköpet fått 25 % rabatt. Hur många procent skulle han ha vunnit eller förlorat, om han själv ej fått rabatt, men likväl sålt till samma pris som nu?
3. I en halvcirkel, vars radie är r, har man inskrivit en cirkel, som tangerar halvcirkelns diameter i dess mittpunkt. Beräkna förhållandet mellan den inskrivna cirkelns omkrets och halvcirkelns *hela* omkrets.
4. En affärsman inköpte 50 yards klädestyg från England till ett pris av $14\frac{1}{2}$ shillings per yard. Tull, frakt, försäkring och emballage gingo till 90 kr. för hela partiet. Han sålde sedan alltsammans efter 24 kr. per meter. Hur många procent vann han på affären, om han i inköpspriset även inräknade de nämnda kostnaderna för tull, frakt m. m.? 1 yard = 90 cm och 1 pound = 20 shillings = 19,20 kr.
5. Lös ekvationen

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3x}{2}-4\right)-\left(\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3x}{2}+4\right)=\frac{48}{9x^2-64}.$$

6. Ett cylinderformigt kärl, vars diameter är 8 cm, innehåller vatten. Man låter blyhagel falla ned i vattnet, som därigenom stiger. Hur många blyhagel med diametern 3 mm erfordras, för att vattenytan skall stiga 4,5 cm?
7. I en cirkel med medelpunkten O dragas två mot varandra vinkelräta radier OA och OB, vardera 2 cm. $\angle AOB$ delas mitt itu och delningslinjen AC råkar periferien i C. Hur stor är ytan av fyrhörningen $ABCO$?
8. I en cirkel, vars radie är 6 cm, drages en diameter AB. Vinkelrätt mot AB drages en annan diameter CD. Genom C och en punkt E på AB drages en korda CF. Beräkna längden av denna korda, om $AE : EB = 1 : 3$.

Resultat: **1.** $x=6$. **2.** 10 % förlust. **3.** $\frac{\pi}{\pi+2}=0{,}611$. **4.** 37,4 %. **5.** $x=3$. **6.** 16 000 st. **7.** $2+\sqrt{2}=3{,}414$ cm². **8.** $4{,}8\sqrt{5}=10{,}73$ cm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Vid djuplodning i havsvatten med spec. vikten 1,03 användes som lodlina en järntråd med en genomskärningsyta av 7 mm². Linan sträckes av en järnvikt på 4 kg. Beräkna spänningen i linan vid vattenytan, då vikten befinner sig omedelbart ovanför bottnen på 70 m djup. Specifika vikten för järn är 7,5.
2. En jämntjock planka, som är 4 m lång och väger 24 kg, vilar på två bockar. Den ena bocken A är placerad vid plankans ena ända och den andra B på 1 m avstånd från den andra ändan. Mellan A och B, på 0,5 m avstånd från B, belastas plankan med en vikt på 10 kg. Hur stor kraft verkar då på vardera bocken?
3. Över en lätt och lättrörlig trissa ligger ett snöre. I snörets ena ända har man fäst en vikt på 0,2 kg, som fasthålles vid golvet. I den andra ändan har man fäst en vikt på 0,5 kg, vars underkant befinner sig 3 m över golvet. Den mindre vikten släppes, varvid båda vikterna komma i rörelse. Hur stor rörelseenergi har den större vikten, då den slår mot golvet?
4. I en termosflaska, som delvis är fylld med vatten, har man nedfört en elektrisk doppvärmare, vilken under hela försöket genomflytes av en konstant elektrisk ström. Då vattnet börjat koka, nedsänker man en järnbit, som väger 5 hg, i vattnet. Kokningen upphör, och det dröjer 1 minut 20 sekunder, innan den åter börjar. Järnbiten tages nu upp ur vattnet, och 50 cm³ vatten av samma temperatur, som järnbiten hade, då den nedfördes, hälles ned i det kokande vattnet. Denna gång dröjer det 1 minut 10 sekunder, innan kokningen åter börjar. Beräkna specifika värmet för järn.
5. Hur många liter bensin åtgå per timme i en flygmaskinsmotor, som avgiver en effekt på 150 hästkrafter, då dess verkningsgrad är 25 %? Den använda bensinens effektiva värmevärde är 10 000 kcal per kg. 1 liter bensin väger 0,72 kg. 1 hästkraft = 75 kgm per sek, och 1 kcal = 427 kgm.
6. Mellan två av trådarna i en elektrisk kraftledning har kortslutning uppstått någonstans ute på ledningen. På kraftstationen finner man, att motståndet i ledningen från kraftstationen genom ena tråden fram till kortslutningsstället och tillbaka genom andra tråden är 2,1 ohm. Hur långt från kraftstationen kan kortslutningsstället högst antagas ligga? Ledningstrådarna ha en genomskärningsyta av 10 mm², och deras specifika motstånd är 0,017.
7. I en belysningsanläggning är spänningen mellan två ledningar 220 V. Kopplas mellan dessa ledningar ett visst motstånd i serie

med en voltmeter med 30 000 ohms motstånd, visar voltmetern 55 V. Beräkna det förstnämnda motståndet.

8. En båglampa anslutes till ett nät med 220 volts spänning medelst en motståndsmatta, märkt 220 V, 1000 W. Hur stor blir strömstyrkan, om spänningsfallet i ljusbågen är 45 V?

Resultat: **1.** 6,62 kgf. **2.** På A och B resp. $9\frac{2}{3}$ och $24\frac{1}{3}$ kgf. **3.** $\frac{9}{14}$ kgm. **4.** 0,114. **5.** 52,7 l. **6.** 618 m. **7.** 90 000 ohm. **8.** 3,62 amp.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.[1]

1. Huru sker lufttillförseln till en tändkulemotors cylinder?
2. Vid provning av en motor befanns periferikraften på svänghjulet vara 50 kgf. Svänghjulets radie var 300 mm, varvantalet 500 pr minut. Beräkna motorns nyttiga effekt.
3. En ångpanna, i vilken ångtrycket är 9 kgf/cm² övertryck, avdunstar 8 kg ånga per kg stenkol. Bränslets värmevärde är 7 000 kcal/kg. Matarvattnets temperatur är 80°. Beräkna pannans verkningsgrad. (Ångtabell användes.)
4. Skruvhjulet till en snäckväxel har 360 mm delningsdiameter och 60 kuggar. Skruven är dubbelgängad. Huru stor är a) utväxlingen b) stigningen på skruven?
5. Vid en enradig överlappsskarv är nitdiametern 23 mm, nitdelningen 50 mm och plåttjockleken 13 mm. Största påkänningen i plåten är 750 kgf/cm². Beräkna skjuvpåkänningen i nitarna.
6. I en plåt stansas ett hål, vars diameter är lika med plåtens tjocklek. Skjuvhållfastheten hos plåten är 3 500 kg/cm². Beräkna tryckpåkänningen i stansen.

---

7. Skissera en sektion av golvbjälklaget till bottenvåningen av ett mindre trähus, försett med källare. Utsätt förklarande beteckningar på skissen.
8. Beskriv hur det tillgår att gjuta en tvättbassäng (vattentät bassäng) av betong.
9. Rita i valfri skala detaljskisser, visande vid trätakstolar vanligen förekommande hopfogningar.

Resultat: **2.** 10,5 hkr. **3.** 66,7 %. **4.** a) 1 : 30. b) 12π mm. **5.** 635 kgf/cm². **6.** 14 000 kgf/cm².

[1] Tid: 6 tim. Tillåtna hjälpmedel: vissa handböcker och lektionsanteckningar. För betyget godkänd fordras, att minst två av uppgifterna 1—6 och minst en av uppgifterna 7—9 äro nöjaktigt behandlade.

(Tidskrifter, forts. från sid. 137.)

IVA, utg. av Ingenjörsvetenskapsakademien. Årg. 1937: 1—2.

Ur innehållet: Nya biokemiska rön; Bensin och smörjoljor ur trätjära, skifferolja m. fl. genom hydrering; Hårdhetsbestämning i fosfathaltiga vatten; Röntgenografisk mätning av elastiska spänningar; Motståndsmaterial; Nya fotoceller; Nya bimetaller. — Flytande bränslen; Reaktionsförmågan hos fasta ämnen och dess tekniska tillämpningar; Teknisk nomenklatur; En intressant temperatureffekt vid ångas inströmning i en sluten behållare; Gulfärgning av virke vid torkning; Vedbeck; Elektriska metoder för uppmätning och registrering av mekaniska krafter.

ERA, Årg. 1937: 2—5.

Ur innehållet: En svensk köksmotor; Flerskikts-isoleringar och deras användning inom kyltekniken; Instrumenttillverkning i Sverige; Prissättning av elektriska installationsarbeten; Leipzigmässan 1937; Blandljus; Tekniskt föreskriftsspråk; »Sentinel», ett nytt svenskt mätinstrument; Den elektriska kraftförbrukningen i Sverige; Elektriska nyheter.

Tidskrift för ljuskultur, Årg. 1937: 1—2.

Ur innehållet: Avsyningsförfaranden med urladdningslampor; Om blandljus och dess användningsmöjligheter; Trafikkontroll med ljussignaler; Ljuskällors fotokemiska verkningar; Litteratur.

Industritidningen Norden, Årg. 1937: 9—21.

Ur innehållet: Italiens civila luftskydd; Brandsäkerheten hos elektriska anläggningar; Ekospärr med glimrör; Teknisk fortbildning genom självstudier; Atlantflygplan för reguljär trafik; Fotografisk ljudupptagning; De finska kopparmalmernas tillgodogörande och förädling; Elektrisk-akustisk avståndbestämning. Ett stort antal notiser om nya uppfinningar och patent i varje nummer.

Matematisk Tidsskrift, København, 1937, Avd. B: *Festskrift til Harald Bohr*, fra Venner og Elever i anledning af hans 50 aars Fødselsdag, 22. April 1937.

Den förnämliga skriften innehåller ett 25-tal uppsatser av danska matematiker. Bland uppsatsrubrikerna må nämnas: Ensidigt begrænsede, svagt regulære Talfølger; Om summation af en række; Om Mersennes Tal; Om konvekse Figurer; Bemærkninger til »symbolisk Regning»; Om Poncelet's Sætning; En Afbildning af den komplekse Plan med euklidisk Metrik; Om sekularkonstanten af en næstenperiodisk Funktion; Om Nøjaktigheden ved Interpolation; Nyere Undersøgelser over de Dirichletske Rækkers Funktionalligninger; Overleveringen af babylonske matematiske Metoder genom græske Skrifter; Om Længdebestemmelser; Om Spaltning af Fourierudviklinger m. fl.

Fysisk Tidsskrift, København, 1937: 1.

Ur innehållet: J. K. Bøggild, Nobelpristagerne i Fysik for 1936; R. W. Asmussen, Nobelpristagerne i Kemi for 1936; Chr. Jensen, Skoleforsøg over en Kondensators Urladdninger; R. E. H. Rasmussen, Nogle Forsøg fra Lydlæren; C. V. Henrichsen, Relativitetsprincippet, En Sender og Modtager til Fjernsyn.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo, 1937: 1.

Ur innehållet: H. J. Jelstrup, Litt om de på jorden virkende gravitasjonskrefter og jordens form: N. Hatzidakis, Développées et développantes relatives; Eksamensopgaver; Opgaver til løsning; Løste opgaver.

Vätskors och gasers strömning.

Av MARTIN SJÖSTRÖM.

Från att ha varit ett specialkapitel inom fysiken av huvudsakligen teoretisk art och utan större allmänt intresse, som kunnat motivera dess upptagande i skolfysikkursen, har läran om vätskors och gasers strömning i våra dagar fått en aktualitet, som ingen för ett par årtionden sedan hade kunnat drömma om. Till följd av flygets och överhuvudtaget de motoriserade trafikmedlens snabba utveckling mot större hastigheter har detta förut undanskymda kapitel nu blivit ställt i stark belysning.

Särskilt äro de tekniskt och naturvetenskapligt inriktade av den yngre generationen gripna av ett levande intresse för flygning och flygteknik och de grundläggande frågor av fysikalisk natur, som därmed stå i samband. Det är därför ej heller ägnat att förvåna, att lärjungar i de högsta ringarna vid våra läroverk ofta anhålla att få ämne för enskilt arbete hämtat från ifrågavarande område. Jag har vid mer än ett tillfälle önskat ha en kortfattad, något så när elementär framställning att sätta i händerna på dem som en första orientering.

Denna uppsats är skriven med tanke på detta behov samtidigt som den vill rikta uppmärksamheten, där så ej förut skett, på en del av fysiken, där vackra experiment med relativt enkla medel kunna utföras, behandlande frågor av största aktualitet.

Toricellis utströmningslag.

Försök 1. Behandlingen av vätskors och gasers strömning och kroppars rörelse i flytande och gasformiga medier inledes lämpligen med studiet av en vätskas strömning ur ett öppet kärl, försett med ett mindre, runt hål i bottnen fig. 1, eller i en vägg nära bottnen. Sambandet mellan utströmningshastigheten v och tryckhöjden h, d. v. s. avståndet från hålets mittpunkt till fria vätskeytan, undersökes. Hastigheten bestämmes efter uppvägning av den på en viss, kort tid utströmmade vätskemängden genom division av utströmmade volymen med hålets genomskärningsyta q och tidens längd.

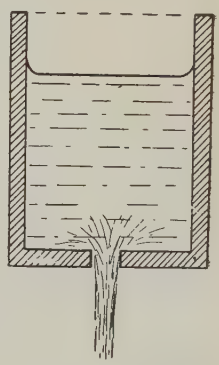


Fig. 1. En vätskas strömning ur kärl med hål i botten. Strålkontraktion.

Om vätskan vore ideal, d. v. s. friktionsfri måste enligt energiprincipen rörelseenergien tätt utanför hålet hos den på tiden Δt utströmmade vätskemängden $q \,.\, v \,.\, \Delta t \,.\, \varrho$ vara lika stor som kärlets förlust av energi under samma tid. Förändringen, som inom kärlet skett, är följande: vätskans yta (storlek Q) har sjunkit stycket Δh; från kärlet har således försvunnit vätskemängden $Q \,.\, \Delta h \,.\, \varrho$, som hade hastigheten v_1, och befann sig på höjden h över hålets horisontalnivå. I övrigt är allt oförändrat. Energiinnehållet i kärlet har således minskat med rörelseenergien $\frac{1}{2}\, \Delta h \,.\, Q \varrho v_1^{\,2}$ och med potentiella energien $\Delta h Q \varrho g h$ där g är jordacc. Alltså:

$$\Delta h\, Q\, \varrho\, g\, h + \frac{\Delta h\, Q\, \varrho\, v_1^{\,2}}{2} = \frac{q\, v\, \Delta t\, \varrho\, v^2}{2}.$$

Eftersom vätskan är osammantryckbar, är $\Delta h\, Q = q\, v\, \Delta t$, men $\frac{\Delta h}{\Delta t} = v_1$. Följaktligen

$$Q v_1 = q v \text{ och } g\, h = \tfrac{1}{2}\,(v^2 - v_1^{\,2}). \qquad (1)\,(2)$$

Om nu ytan Q är mycket stor gentemot q, är v_1 mycket liten vid sidan av v. Då kan v_1^2 försummas vid sidan av v^2 och

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{eller} \quad h = \frac{v^2}{2g}. \tag{3}$$

Denna lag kallas Torricellis utströmningslag. Hastigheten beror således ej av ϱ, utan endast av h och g.

Jämföres den per sekund utströmmade vätskemängden, som vid försök 1 uppmättes med den enligt denna formel beräknade, finner man, att den förra med $^1/_3$ understiger den beräknade. Anledningen härtill är tvåfaldig. 1:o Strålens tvärsnitt är ej q; strålen kontraheras i hålet. Vätskepartiklarna röra sig nämligen i kärlet fram emot hålet från alla håll. De partiklar, som ej strömma rakt fram mot hålet, måste därför genom sin rörelse från sidorna pressa ihop strålen. Newton är den förste som iakttagit denna sammansnörning av strålen (contractio venae). 2:o I hålet uppkommer energiförlust genom friktion. Hur stor denna är och hur mycket hastigheten därigenom minskas låter sig svårligen beräkna.

Förses emellertid utströmningsöppningen, som bör vara cirkulär, med ett mycket kort, cylindriskt ansatsrör med starkt vidgad inloppskanal, uppkommer ej strålkontraktion. Den härledda formeln gäller då med en noggrannhet, som för praktiskt bruk är fullt tillräcklig. (Se Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, årg. 1920, I: 273.)

Vätskors strömning genom långa rör.

Försök 2. Till en flaska (ett kärl) försett med sidorör kopplas ett långt glasrör med konstant tvärsnitt. Vid röret, som lämpligen bringas att inta horisontalställning, äro fastsatta ett antal smala stigrör (fig. 2). Vätskepelarens höjd i stigrören anger vätsketrycket mot rörväggen på resp. ställe på rörledningen. Man finner, att trycket stiger lineärt från mynningen in mot flaskan och att trycket vid mynningen

är noll (bortsett från det atmosfäriska trycket). Sträckes ett snöre från mynningen fram till glaskärlets vägg, så att det kommer att beröra stigrören vid resp. vätskeytor, kommer man till en punkt, som ligger h_2 cm under fria vätskeytan. Denna höjd h_2 kallas *hastighetshöjden,* emedan det är *den* som bestämmer strömhastighetens storlek. Har man såsom i föregående försök försett utströmningsrörets i vätskan befintliga ände med en lämplig utvidgning (här ej lika nödvändigt), finner man nämligen, att $h_2 = \frac{v^2}{2g}$. Höjden h_1 kallas *motståndshöjden,* ty den däremot svarande potentiella energien omvandlas i värme genom friktionskrafternas ar-

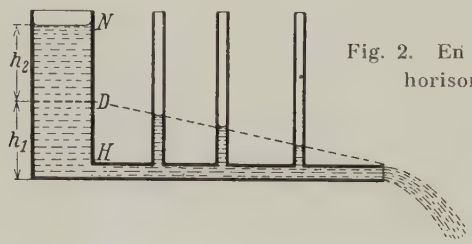


Fig. 2. En vätskas strömning genom horisontellt, jämntjockt rör.

bete. Studerar man sambandet mellan rörtvärsnitt, rörlängd, tryckskillnad och genomströmmad vätskemängd, finner man en lag, som har en påtaglig likhet med den för en elektrisk ström gällande Ohms lag I. Vore friktionsarbetet lika med noll, stode vätskan lika högt i alla rören. Vi återkomma härtill på sid. 8.

Försök 3. Föregående försök erbjuder intet överraskande resultat. Utbytes emellertid ett litet stycke av det i föregående försök använda, jämntjocka röret emot ett avsevärt smalare, med stigrör försett, kort rörstycke (fig. 3), finner man att vätsketrycket i det smalare röret är mindre än i de angränsande delarna av det vidare röret. Eftersom varje tvärsnitt av rörledningen per sek. genomflytes av samma vätskemängd, är strömhastigheten i det smalare röret större än i det vidare.

Försök 4. Med ett rör av den form, fig. 4 utvisar, kopplat med den smalare änden till vattenledningen, är det lätt åstadkomma ett *undertryck*, så stort att vatten suges upp till flere dm höjd. Väggtrycket är således på detta ställe mindre än atmosfärstrycket. Minskas strömhastigheten, minskar undertrycket, ökas strömhastigheten, ökar undertrycket. Detta enkla experiment kan ej verka annat än häpnadsväckande på den som första gången ser det utföras.

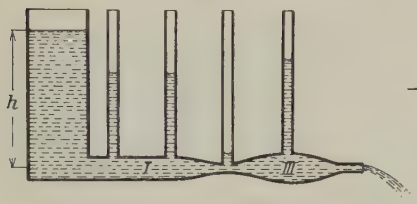


Fig. 3. Vätskeströmning genom rör med växlande tvärsnitt.

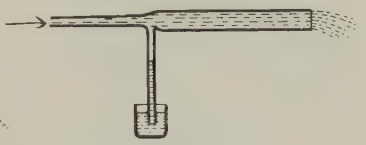


Fig. 4. Rör för demonstration av hydrodynamiska undertrycket.

En ganska elementär teoretisk undersökning av tryckkrafterna i en strömmande vätska ger förklaringen till det egendomliga fenomenet.

Bernoullis sats.

Vi vilja antaga, att strömningen i en vätska är *stationär*, d. v. s. att hastigheten i varje punkt i det av vätska genomströmmade rummet är oberoende av tiden; hastigheten är således oföränderlig i varje punkt, men kan givetvis ha olika värden i närbelägna punkter i rummet. Strömning av detta slag kallas laminär. Strömningen i försök 1 –4 kan betraktas som stationär, om det sörjes för att vätsketrycket vid rörens inströmningsmynning hålles konstant.

Med en *strömlinje* förstås en linje, vars riktning i var och en av dess punkter sammanfaller med strömningshastighetens riktning därstädes. Tänka vi oss en liten yta i vätskan och strömlinjer dragna genom alla punkter på ytans randkurva, erhålles ett *strömrör*. Den vätska, som

strömmar in genom ifrågavarande yta, kan därför ej passera ut genom strömrörets väggar.

Vi betrakta det vätskeparti, som i ett visst ögonblick befinner sig mellan tvärsnitten S_0 och S i ett strömrör (fig. 5) och antaga, att vätskan strömmar utan friktionsförluster och utan virvelbildning. Strömhastigheten vid resp. tvärsnitt må vara v_0 och v, statiska trycken p_0 och p samt tvärsnittens höjder över en viss horisontalnivå y_0 och y. Under tiden Δt flyttar sig den mellan S_0 och S avgränsade vattenmassan från läget ab till läget $a'b'$. Förflyttningen har skett mot tyngdkraften, mot trycket p och med trycket p_0. Summan av det på vätskemassan uträttade arbetet är lika med ökningen i rörelseenergi. Rörelsetillståndet och läget av vätskemassan mellan a' och b kan betraktas som oförändrat. Arbetet emot tyngdkraften består således däruti, att volymen $S_0 \cdot v_0 \cdot \Delta t$ lyftes upp från nivån y_0 till y. Däremot svarar arbetet $S_0 v_0 \Delta t \varrho g (y - y_0)$ (ϱ = vätskans täthet; g = jordacc.). Tryckkraften $p_0 S_0$ på nedre ytan utför arbetet $p_0 S_0 v_0 \Delta t$, och mot tryckkraften pS på övre ytan uträttas arbetet $pSv\Delta t$. Ökningen i rörelseenergi består däri att volymen $S_0 v_0 \Delta t$ får hastigheten ökad från v_0 vid nivån y_0 till v vid nivån y. Enligt energiprincipen erhålles alltså:

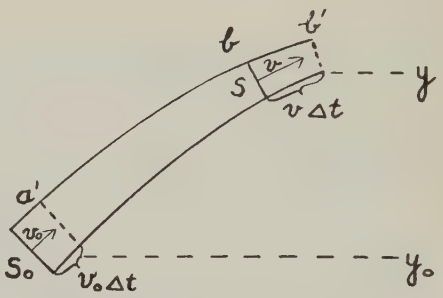


Fig. 5. Strömrör för härledning av Bernoullis sats.

$$\tfrac{1}{2} \varrho S_0 v_0 (v^2 - v_0^2) = p_0 S_0 v_0 \Delta t - pSv\Delta t - S_0 v_0 \Delta t \varrho g (y - y_0).$$

Då vätskan är osammantryckbar, är $S_0 v_0 \Delta t = Sv\Delta t$, varav erhålles:

$$p + \tfrac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho g y = p_0 + \tfrac{1}{2} \varrho v_0^2 + \varrho g y.$$

Eftersom de två tvärsnitten äro godtyckligt valda, gäller för alla tvärsnitt av ett och samma strömrör

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{konstant.}\ ^1 \qquad (1)$$

Om vi nu antaga, att vätskans förflyttning sker i horisontell led, förenklas formeln till

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 = \text{konstant.} \qquad (2)$$

Man övertygar sig lätt därom, att andra termen i vänstra ledet har dimensionen av tryck. Detta tryck $\frac{1}{2}\varrho v^2$ kallas *hastighetstrycket* eller *dynamiska trycket*. Ekvation (2) kan nu i ord uttryckas så: *I varje punkt av ett horisontalt strömrör är summan av statiska och dynamiska trycket d. v. s. totala trycket konstant.* (Bernoullis sats.)

Ju större hastigheten är, desto mindre är statiska trycket, och omvänt. Vidgar strömröret sig någonstädes så, att hastigheten där närmar sig noll, blir statiska trycket därstädes lika med totala trycket.

I en strömmande vätska ha vi således att skilja på tre tryck: totala, statiska och dynamiska. I en följande avdelning sid. 10 skall redogöras för de instrument, med vilka dessa tre tryck var för sig kunna mätas.

Vi vända nu för ett ögonblick tillbaka till de i föregående avdelning beskrivna försöken 3 och 4. De där iakttagna egendomliga tryckförhållandena förklaras på följande sätt med hjälp av Bernoullis sats. Vid rörmynningen är statiska trycket = 0 (egentligen övertrycket över det atmosfäriska trycket). I rör III (fig. 3), vars tvärsnitt är flere

[1] Divideras ekvaktion (1) med $g\rho$, kommer första termen att betyda statiska trycket mätt i cm vätskepelare $\left(h_s = \frac{p}{\rho g}\right)$, andra termen $\frac{v^2}{2g}$, som är stighöjden för en med hastigheten v uppåt kastad kropp, kallas hastighetshöjden och tredje termen y är ortshöjden. Bernoullis sats kan således ges följande allmänna formulering: *I varje punkt av ett strömrör är summan av statiska tryckhöjden, hastighetshöjden och ortshöjden konstant.*

gånger större än utloppsmynningens, är hastigheten lika många gånger mindre än utströmningshastigheten, och statiska trycket därför i motsvarande grad högre. I rör I, som är något smalare än III, är dynamiska trycket därför något större än i III och statiska trycket följaktligen något mindre. Förträngningen mellan I och III har ungefär samma tvärsnitt som utloppsmynningen. Trycket skulle således där vara noll men är i själva verket något större, beroende på friktionskrafterna.

Är strömhastigheten tillräckligt stor, är det naturligtvis intet som hindrar, att hydrostatiska trycket sjunker under atmosfärstrycket. Det är detta, som inträffar vid försök 4.

Bernoullis sats äger, som redan påpekats, full giltighet endast för den ideala vätskan, men erfarenheten visar, att den med framgång kan tillämpas såväl på verkliga vätskors som på verkliga gasers strömning, med undantag dock för de områden inom den strömmande vätskan, där friktion och virvelbildning orsaka starkare avvikelser från den ideala vätskans strömning (sid. 11 och följande). En annan inskränkning i satsens giltighet för vätskor är den, att det statiska trycket ej kan sjunka under den mättade ångans tryck utan att vätskan splittras, varvid sammanhanget således går förlorat mellan dess olika delar. Detta fenomen kan utan svårighet demonstreras genom följande försök.

Försök 5. Ett glasrör (8 mm inre diam.) med förträngning mitt på röret kopplas med gummislang till vattenledningen. Låter man en tillräckligt hastig vattenström gå genom röret, sjunker statiska trycket i förträngningen så långt att vattenångans mättningstryck underskrides. Genast börjar kokning i förträngningen, där ett hålrum med skummande vatten alstras. Samtidigt hör man ett starkt visslande ljud, som uppkommer, då vattnet slår samman vid utträdet ur förträngningen och kommer in i det vidare röret, där trycket åter blir normalt. Fenomenet, som kallas *kavitation,* hålrumsbildning, kan uppkomma i vatten- och

ångturbiner och vid snabbgående propellrar, där strömmen invid skarpa kanter hastigt skall ändra riktning och det i följd härav krävs stort undertryck i och för riktningsändringen. Då hålrummen där med stor kraft slå samman, kan godset bli utsatt för materialförstörande tryckkrafter på hundratals atmosfärer. Metoder att hindra uppkomsten av kavitation, som således lätt uppstår vid stora hastigheter, är ett aktuellt tekniskt problem.

Försök 6. Ett paradoxalt försök, som kan utföras med enkla medel, och som utgör en vacker tillämpning av Bernoulliska satsen, är följande. Genom en större kork borras ett hål vinkelrätt mot de plana ytorna, varefter ett glasrör inskjutes så långt, att mynningen kommer att ligga i korkytans plan. Blåser man kraftigt genom röret och samtidigt håller ett visitkort framför korken, suges visitkortet mot korken och rörmynningen. Ju starkare man blåser, dessto kraftigare suges kortet fast. Förklaringen är denna: luftströmmen breder ut sig åt sidorna mellan kortet och korken, varvid hastigheten hos luftströmmen avtar med avståndet från rörmynningen. Vid kanten av korken härskar atmosfärstrycket, alltså råder i mellanrummet mellan korken ock kortet aerostatiskt undertryck, som suger kortet mot korken.

Bland instrument, vilkas funktion baserar på hydrodynamiskt undertryck, må nämnas vattensugen, injektorer på ångmaskiner, apparater för sprutlackering, bunsenbrännaren, Venturiröret för mätning av vindhastighet eller strömningshastigheten i rör. Till välkända företeelser, som äro verkningar av samma slag av tryck, räknas en fanas eller vimpels fladdrande i vinden, vågrörelsen i skiljeytan mellan två medier, som röra sig i förhållande till varandra, exempelvis vågorna på sjöns yta, böljemolnen, som uppkomma i skiljeytan mellan luftströmmar av olika täthet, temperatur och fuktighetshalt.

Tryckmätningsinstrument.

Vid tryckmätning i strömmande vätskor eller gaser användas några speciella instrument i kombination med vätskemanometer, för vilka jag i korthet vill redogöra. De tryck, varom här är fråga, äro de tre ovan nämnda: statiska trycket, dynamiska trycket och totala trycket.

a. *Totala trycket* mätes medelst ett Pitotrör [1] (fig. 6 a). Införes ett dylikt rör i vätske- eller luftströmmen så, att cylindermanteln är parallell med strömlinjerna, stoppas vätskan omedelbart framför rörmynningen (jämför strömningen kring plan och cylindrisk yta, fig. 9—12), men på ömse sidor om denna böja strömlinjerna av efter röret. Eftersom strömhastigheten är noll omedelbart framför öpp-

a b c

Fig. 6 a. Pitotrör för mätning av totala trycket.
Fig. 6 b. Trycksond för mätning av statiska trycket.
Fig. 6 c. Prandtls rör för mätning av dynamiska trycket.

ningen (s) i röret, kommer statiska trycket därstädes enligt Bernoullis sats att bli lika med totala trycket. En till Pitotröret kopplad manometer [2] anger således totala trycket.

[1] En förenklad form av Pitotrör, som i vissa fall kan användas, är ett rakt glasrör, som i ena ändan är rätvinkligt omböjt. Nedföres t. ex. den omböjda skänkeln och hålles antiparallellt i en vattenström och den andra skänkeln hålles vertikalt, pressas vatten upp i denna till en höjd $\frac{v^2}{2g}$, som svarar mot det dynamiska trycket $\frac{1}{2}\rho v^2$. Avståndet från vätskeytan i stigröret till myningen under vattenytan ger totala trycket.

[2] Då de tryckkrafter, som skola mätas, ofta äro små, är det lämpligt använda mikromanometer: en ej allt för liten flaska med rör nära bottnen, vilket genom gummislang förbindes med ett mot horisontalplanet svagt lutande glasrör. Som manometervätska användes färgad alkohol.

b. *Statiska trycket* uppmätes med ett till mikromanometern kopplat rör av den form, fig. 6 b åskådliggör. Vätskans strömlinjer förlöpa där parallellt med det lilla rörets mantelyta. Vid hålet (*s*) verkar det statiska trycket och inpressar vätska resp. luft till dess trycket inifrån blir lika med statiska trycket från det strömmande mediet mot rörväggen.

c. *Dynamiska trycket* är skillnaden mellan totala och statiska trycket. Det kan även direkt mätas medelst ett av Prandtl konstruerat instrument fig. 6 c, ofta även kallat Pitotrör. Det är som av figuren framgår en kombination av de båda ovan beskrivna rören. Tryckdifferensen mellan de två manometerrörens angivelser är således det dynamiska trycket av vilket hastigheten kan beräknas.[1]

Rör av ovan beskrivna slag kunna användas både vid mätning i luft och vätska. Man måste dock se till, att strömförhållandena ej i högre grad ändras därigenom att instrumentet (sonden) införes i det strömgenomflutna rummet.

Strömning kring fasta kroppar.

Läran om vätskors och gasers strömning är som bekant ett synnerligen besvärligt kapitel inom fysiken framförallt, när det gäller att taga hänsyn till friktionen inom det strömmande mediet självt och till friktionen emot de fasta kroppar, som äro av vätskan kringströmmade. Det kan därför ej vara tal om att i denna uppsats, som i all anspråkslöshet endast vill ge en mycket kortfattad orientering över strömningslärans grunder, gå in på den matematiska sidan av detta stora problem.

Den Bernoulliska satsen är visserligen härledd för den friktionsfria, »ideala vätskan» och äger endast för den full giltighet, men som vi av det föregående sett, är satsen även användbar på verkliga gaser och vätskor, åtminstone i så-

[1] Se föreg. sida.

dana fall, där friktionskrafterna spela en underordnad roll. Den kommer även i det följande att bli oss en ovärderlig hjälp vid klarläggandet av de på omströmmade kroppar verkande tryckkrafterna. I vad mån friktionskrafterna påverka strömningsförloppet, skall följande inledande experiment visa.

De grundläggande strömningsfenomenen kring fasta kroppar studeras bekvämast på så sätt, att man låter vatten, på vars yta lykopodiumpulver utströtts, strömma förbi den i vattenströmmen delvis nedsänkta stillastående kroppen.

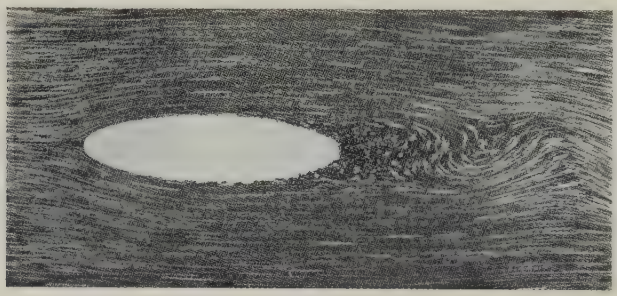


Fig. 7. Strömning kring stillastående elliptisk cylinder. Kameran stillastående. Strömlinjebild.

Lykopodiumkornen följa vattnet i dess rörelse kring kroppen. Fig. 7 återger en med stillastående kamera erhållen bild av strömningen kring en elliptisk cylinder. På cylinderns framsida delas vattenströmmen, strömlinjerna smyga efter cylinderns långsidor, bakom cylindern uppkommer dödvatten med virvelbildning. Ungefär så ter sig också bilden för ett öga, som med blicken fäst vid den stillastående kroppen iakttager strömningen. Den livliga rörelsen i virvelområdet kan *ett* fotografi dock ej återge.

Det finns emellertid ännu ett sätt, varpå strömningen kan studeras. Kroppen kan föras fram i stillastående, lykopodiumbestrött vatten. Även då följa lykopodiumkornen vattnet i dess rörelse. Vi utföra försöket på följande sätt. Innan vi sätta kroppen i rörelse, fästa vi blicken vid de stilla-

stående kornen och försöka abstrahera från kroppen själv. Så sätta vi kroppen i rörelse. Vi uppfatta genast en livlig rörelse i vattnet runt kring kroppen långt ut på sidorna. Framför kroppen tränges vattnet framåt—utåt, bakom kroppen suges det framåt—inåt och utåt sidorna uppkommer en rörelse i motsatt led mot kroppens egen rörelse. Mer hinner observatören knappast se, allt rör sig, blicken söker något oföränderligt att hålla sig vid, den fästes vid kroppen, som glider fram, och plötsligt ser iakttagaren samma bild, som nyss beskrevs, vattnet syns strömma kring en stilla-

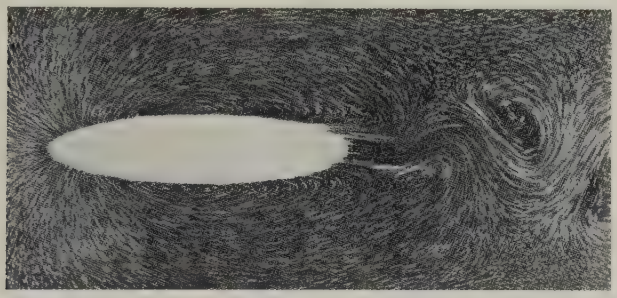


Fig. 8. Strömning kring elliptisk cylinder, som rör sig i stillastående vatten. Kameran stillastående. Strömningsbild.

stående kropp. Med kamerans hjälp kan bilden fasthållas. Fig. 8 har erhållits med stillastående kamera, då den elliptiska cylindern förts fram genom stillastående vatten. Den cylinderformade kroppen har rört sig ett stycke under exponeringen och är därför suddig på bilden. Fig. 8 ger en klarare inblick uti strömningens förlopp än fig. 7. Båda slagen av bilder komma till användning vid studiet av kroppars rörelse i vätskor. Det förra slaget av bilder benämnes strömningsbilder (fig. 8), det senare slaget strömlinjebilder (fig. 7). Det är samma strömförlopp som framställes i båda, ehuru observationssättet är olika. Fotograferas med en kamera, som rör sig lika fort framåt som kroppen, förvandlas nämligen strömningsbilden till motsvarande strömlinjebild. När ögat följer kroppens rörelse,

uppfattar observatören strömlinjebilden. Om synriktningen vore oföränderligt densamma, såge observatören strömningsbilden. I förra fallet kunde han konstatera, att strömningen är stationär framför och vid sidan av kroppen, och att Bernoullis teorem således där kan användas, men att rörelsen är turbulent bakom kroppen. I senare fallet åter konstaterar han, att strömningen ingenstädes är stationär, hastigheten förändras ju oavbrutet i varje punkt i synfältet. Bernoullis sats är den Ariadnetråd som skall leda oss fram genom dynamiska fenomenens labyrintgångar, därför komma vi i det följande endast att studera strömlinjebilderna för de kringströmmade kropparna.

Försök 7. En plan, rektangulär skiva föres fram genom det med lykopodiumpulver beströdda vattnet, rörelseriktningen är vinkelrät emot skivan. Följer man med blicken skivan, ser man, hur strömlinjerna dela sig symmetriskt framför skivan och böja av i vida bågar runt skivans kanter. Bakom skivan är strömningen av mer invecklat slag. Bakom skivan uppstår omedelbart, då den sättes i rörelse, virvelbildning i vattnet. Man ser två symmetriska virvelområden med motsatt rotationsriktning (fig. 9), som släpa med skivan allt under det de tillväxa i omfång. Systemet är instabilt. Plötsligt lösgöra de sig från kontakten med skivan och bli efter, nya virvlar uppkomma intill skivan, och nu lösgöra dessa sig växelvis på ena och på andra sidan, samtidigt varmed en ny liten virvel bildas på den bortstöttas plats, men närmare kanten av skivan. Symmetrien är nu fullständigt störd. Virvlarna bilda nu bakom skivan ett långt virvelsläp, som skivan drar efter sig, »v. Kármáns virvelväg». På grund av frik-

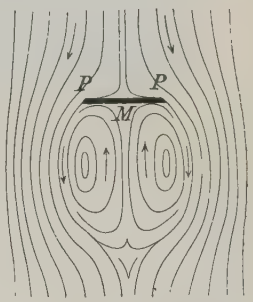


Fig. 9. Strömning kring plan, stillastående rektangulär skiva, innan virvelsläpet hunnit utbildas.

tionskrafterna mattas virvelrörelsen av allt mer ju längre från plattan virvlarna hinna.

Försök 8. En cirkulär cylinder med samma diameter som skivans bredd i föregående försök föres genom vattnet med axeln vertikal. Då cylindern sättes i rörelse, uppkommer under första ögonblicket en strömning av det slag, som åskådliggöres av de heldragna linjerna i fig. 11. Ström-

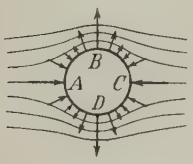


Fig. 10. Tryckkrafternas fördelning kring cirkulär cylinder i strömmande ideal vätska.

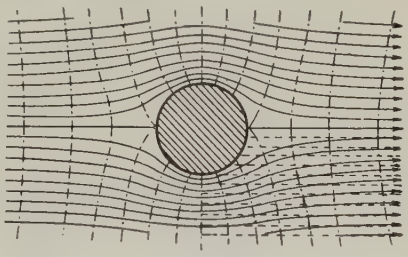


Fig. 11. Strömlinjebild vid cirkulär cylinder i ideal vätska.

ningen ser likadan ut på fram- som baksidan. Denna strömning varar blott ett kort ögonblick, sedan börjar virvelbildning på baksidan av cylindern alldeles som i föregående försök (fig. 12). Virvelsläpet blir dock något smalare än vid den plana skivan. Genom att kläda in den plana skivan i en cylindrisk mantel nedbringas således virvelbildningen. Den regelbundna avsnörningen av virvlar växelvis till höger och vänster är orsaken till det bekanta fenomenet att sävstrån stå och darra i hastigt strömmande vatten, att telefontrådar sjunga, vinandet, då en

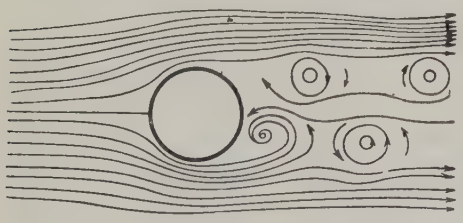


Fig. 12. Strömlinjebild för cirkulär cylinder i vatten. Strömningen turbulent bakom cylindern.

vidja slås genom luften, bruset och dånet i tackel och tåg på ett stort segelfartyg, då vinden drar fram genom riggen, tonerna från Aeolsharpans strängar.

Långt innan man lärt att matematiskt behandla de verkliga vätskornas dynamik, hade man löst problemet om den friktionsfria ideala vätskans strömning kring ett cirkulärt cylindriskt hinder. Man hade funnit, att strömningen försiggår utan virvelbildning och på det symmetriska sätt fig. 11 visar. Mitt på fram- resp. baksidan är vätskan i vila; i det plan genom cylinderaxeln, som är vinkelrätt emot strömriktningen, är hastigheten störst, och alldeles intill cylindern är hastigheten jämnt dubbelt så stor som den ostörda strömhastigheten. Strömningen är i hela rummet

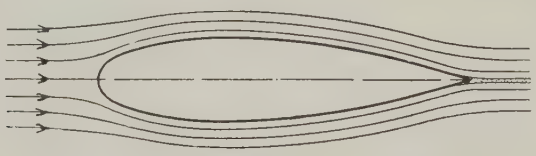


Fig. 13. Strömlinjebild för spolformad kropp.

stationär. Enligt Bernoullis sats måste följaktligen det statiska trycket framför och bakom cylindern överstiga och vid sidorna understiga statiska trycket i den av kroppen ostörda strömningen. Tryckkrafternas fördelning åskådliggöres i fig. 10. Resulterande tryckkraften blir noll. Det kräves intet arbete att föra cylindern i en ideal vätska.

Hålles en cylinderformad kropp med axeln vinkelrätt emot luftströmmen från en fläkt, är det lätt att medelst Pitot- och Prandtl-rör demonstera över- och undertrycken intill den kringströmmade cirkulära cylinderns yta. Man finner emellertid, att trycket på baksidan ej är lika stort som trycket på framsidan. Cylindern erbjuder i medium med inre friktion motstånd emot rörelsen.

Försök 9. Ännu mindre blir virvelbildningen vid en lämpligt spolformad eller fiskformad kropp, fig. 13. Ström-

linjerna följa kroppens kontur nästan alldeles som i en ideal vätska. En så formad kropp säges vara »strömlinjeformad».

Genom lämplig formgivning av kroppen kan virvelbildningen bakom kroppen således mer eller mindre fullständigt elimineras och därmed också den energiförbrukning, som åtföljer virvelbildningen.

Virvelbildningens uppkomst. Gränsskiktteorien.

Det är ett välbekant förhållande, att strömhastigheten i en ränna eller ett rör är störst i mitten, avtager mer eller mindre långsamt mot sidorna för att slutligen snabbt bli noll intill väggarna resp. botten. Det vätskeskikt, inom vilket hastigheten snabbt faller till noll, kallas gränsskiktet, och det är detta gränsskikt, som enligt Prandtl spelar en viktig roll för uppkomsten av en mängd betydelsefulla fenomen, som behandlas inom strömningsfysiken.

Om vi vid utförandet av försök 6 öka strömhastigheten, inträffar det lätt, om övergången från det smala till det vida röret är tvär, att vattnet i det senare plötsligt blir turbulent. Detsamma inträffar i ett jämntjockt rör med förträngning, men man iakttager därjämte, att turbulensen ej uppkommer före smalaste stället. Förklaringen är följande.

Då strömhastigheten ökar inemot förträngningen, tänjes gränsskiktet ut, det tryckes av det hydrostatiska tryckfallet in mot förträngningen. När det därefter skall fortsätta ut mot det vidare röret, har det att röra sig emot ett stigande hydrostatiskt tryck, som hejdar såväl det snabbt strömmande vattnets rörelse som det långsamt framglidande vattnet i gränsskiktet. Om nu detta mottryck är tillräckligt högt, kan det inträffa, att rörelseenergien hos gränsskiktet jämte friktionsarbetet av det snabbt framflytande vattnet ej är tillräckligt att lyfta gränsskiktvätskan uppför det starka

hydrostatiska mottrycket. Vätskelagret stannar på vägen och faller tillbaka ned emot förträngningen. Gränsskiktet förtjockas alltmer och får en hastighet motsatt den centrala strömmen i röret, vars hastighet även nedsättes. Det bildas på så sätt ett vätskelager närmast rörväggen med kraftig virvelbildning. Virvlarna föras bort, ny gränsskiktförtjockning uppkommer o. s .v. Strömningen blir alltså turbulent från att vid lägre hastigheter ha varit rent laminär. Alldeles analoga äro förhållandena, då en cylinder eller en platta föres fram genom en stillastående vätska. Strömningen vid cylindern är under första ögonblicken som förut påpekats ungefär sådan som för den ideala vätskan jfr fig. 10 och 11. Vid B och D är strömhastigheten störst. Gränsskiktet drives bakom cylindern från B mot C och mot det växande statiska trycket, alltså inträffar strax här samma förtjockning av gränsskiktet, återgående rörelse och virvelbildning som i nyss beskrivna försök. Det förtjockade gränsskiktet liksom rullas upp till dess rullen blir så tjock, att den släpper kontakten med cylindern och drives bort (se fig. 12).

Vid den på riktigt sätt strömlinjeformade kroppen, uppkomma inga starka mottryck mot gränsskiktströmningen. Gränsskiktet kan därför glida av kroppen utan att orsaka virvelbildning. En sådan kropps motstånd mot rörelsen blir därför också litet. Det torde böra understrykas, att ju högre strömhastigheten är, desto långsträcktare måste den strömlinjeformade kroppen göras. Ingen kropp är rätt strömlinjeformad för mer än en hastighet.

Försök 10. Emot en nästan rakt uppåt riktad vattenstråle föres från sidan en ping-pong boll. Så snart bollen kommer i kontakt med strålen, avböjes den och glider ett stycke efter bollens yta. Det utbildas ett gränsskikt. Har man valt lämpligt ställe på strålen jämte lämplig lutning av densamma och släpper bollen, suges den fast vid strålen under det den tack vare gränsskiktets rörelse börjar rotera i strålens led. Emedan strömlinjerna i strålen ligga tätare

där den berör bollen, uppstår där undertryck (jämför den omströmmade cylindern fig. 12), vilket suger bollen fast vid strålen. Efter omböjningen löses strålen upp under kraftig virvelbildning.

Försök 11. Ett liknande försök kan utföras med en gummiballong (diam. 1 dm) fylld med luft, som bringas att sväva i luftstrålen från en stark fläkt (fig. 14). Försökets utförande underlättas, om man har en trådände fastsatt vid ballongen och med dess hjälp bringar ballongen till lämpligt ställe i strålen. Varieras fläktmotorns varvtal och därmed luftströmmens hastighet, kan man få ballongen att klättra upp och ned för luftströmmen.

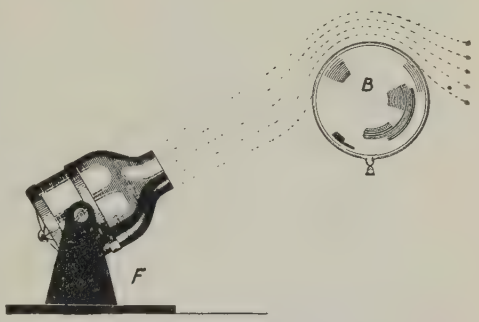


Fig. 14. Gummiballong hängande vid luftstråle.

Anordning för kvantitativ bestämning av luftkraften.

De ovan beskrivna försöken över strömningen kring fasta kroppar kunna ej giva svar på frågan om motståndskraftens eller överhuvudtaget de på kroppen verkande krafternas storlek. Jag övergår nu till att beskriva ett par enkla försöksanordningar, som var för sig möjliggöra denna frågas besvarande, i det fall, att kroppen befinner sig i luft. För studiet av motsvarande problem för rörelse i vätskor måste anordningarna bli mer komplicerade, varför jag här förbigår dem.

En enkel och billig apparatuppsättning föres i marknaden av Firma A. Krüss, Hamburg (fig. 15). Luftströmmen

alstras av en vanlig hårtorkningsfläkt, motståndskroppen, som kan tillverkas av papp, balsaträ eller annat lätt material, är fäst vid ett halmstrå, fastsatt vid den arm på en vanlig brevvåg, som i vanliga fall uppbär vågskålen. Vågen förses med en visare (halmstrå) och motvikten minskas för att öka känsligheten. Skalan graderas i tiondedels gram. Man mäter lämpligen motstånden för plan cirkulär skiva, halvsfärisk yta (halv pingpongboll), sfär, strömlinjeformad rotationskropp, och finner motståndet vara störst för den plana ytan, minst för den strömlinjeformade kroppen.

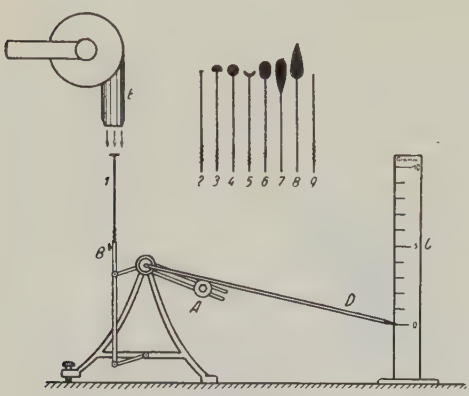


Fig. 15. Enkel apparatur av K. Schütt för mätning av luftmotstånd.

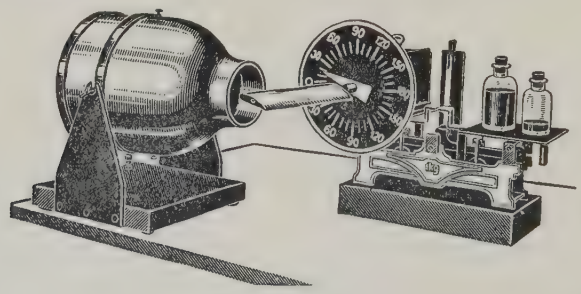


Fig. 16. Anordning av E. Roller för mätning av luftkraften vid bl. a. aeroplanvingar.

En annan av Roller konstruerad instrumentuppsättning tillverkas av Physikal. Werkstätten, Göttingen.[1] Den är visserligen dyrbarare än den förra men har i gengäld

[1] Kan erhållas genom Rudolph Grave, Stockholm,

mångsidigare användning. Fläkten, som är byggd enkom för dessa försök, lämnar en homogen luftström av 10 cm diameter och 12 m/sek. hastighet. Som våg användes en vanlig taffelvåg. Modellkroppen fästes i en hållare, som lägges på ena vågplanet. På det andra placeras vikter (jfr fig. 16). Luftströmmen blåses i vertikal riktning. Med denna anordning erhålles exempelvis vid en viss strömhastighet att luftkraften, i detta fall motståndskraften, är 14 gf för en cylindrisk skiva med 4 cm radie, 8,5 gf för bakre delen av en ituskuren strömlinjeformad kropp med samma tvärsnitt som skivan, 4,5 för främre delen och endast 1 gf, då båda delarna äro hopsatta. Man finner av detta och liknande försök, att motståndet sjunker på samma gång virvelsläpet minskar och att motståndet således har ett minimum för den strömlinjeformade kroppen. Denna erfarenhet blev på sin tid av stor betydelse för konstruktionen av luftfartyg.

Strömningen kring plan skiva, som bildar spetsig vinkel med strömriktningen.

Vi ha förut konstaterat, att det bakom en skiva, som föres vinkelrätt emot strömriktningen, åtminstone till en början utbildas två symmetriska virvlar (jfr fig. 9). Av symmetriskäl är det tydligt, att den resulterande motståndskraften vid en plan skiva kan tänkas anbragt i skivans tyngdpunkt.

Försök 12. Bildar skivan däremot spetsig vinkel emot rörelseriktningen, visar försöket i vatten, att strömningen blir osymmetrisk (fig. 17). Den punkt, där strömmen delar sig, ligger nu närmare framkanten. Strömlinjerna få en kraftig riktningsändring vid omböjningen kring denna kant, under det att vätskan mer jämnt glider av vid bakkanten. En stor virvel ligger bakom främre delen av skivan, och en mindre utbildas bakom bakkanten. Resulterande motståndskraftens (R) anbringningspunkt förflyttas därför mot

framkanten, då skivan vrides ur det mot strömningen vinkelräta läget. Anbringas i skivans tyngdpunkt två motsatt riktade krafter av storleken R, därtill parallella med *R*, få vi dels kraften R anbringad i tyngdpunkten, som vill pressa skivan i strömriktningen, dels ett kraftpar, som strävar att vrida skivan över i det mot strömriktningen vinkelräta läget, vilket således är det stabila läget för en skiva, som är vridbar kring en axel genom tyngdpunkten. Detta visas även lätt med en rektangulär pappskiva, vridbar kring en strumpsticka, trädd genom ett par trådöglor på skivans mittlinje. Föres skivan fram och åter genom luften, eller hålles den i en luftström, ställer den sig alltid vinkelrätt emot rörelseriktningen.

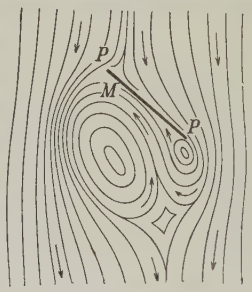


Fig. 17. Strömlinjebild kring plan skiva, som bildar spetsig vinkel med vätskeströmmen.

Ett brevkort, som fritt får falla i sned riktning, rätas upp av detta kraftpar och pendlar kring det horisontala läget (fallande lövet). Släppes kortet, då det är i horisontal ställning, faller det först i horisontal ställning, men börjar därefter vackla och svänga hit och dit. Som förut påpekats sker nämligen virvelavsnöringen, sedan kortet fallit något stycke, växelvis åt höger och vänster. Därför kommer även motståndskraftens anbringningspunkt att svänga kring tyngdpunkten. Är skivan lätt och långsmal, en pappersstrimla, rör den sig på annat sätt, den roterar kring den längsgående symmetriaxeln och rör sig efter ett plan, som bildar 30° à 40° med horisontalplanet. Anledningen härtill är den, att kraftparets moment blir så stort, strimlans tröghetsmoment så litet, att kraftparet välter planet, som därefter går över i spin.

Newtons lag för luftmotståndet.

Det är av vad som förut sagts tydligt, att lagen för sambandet mellan motståndskraften, hastigheten, mediets täthet

och ytans storlek m. m. måste vara mycket komplicerad, även för det enkla fall, att ytan under rörelsen alltjämnt är vinkelrät emot rörelseriktningen. En approximativ lag har först framställts av Newton. Jag skall härleda den genom en enkel dimensionsbetraktelse, varvid antages, att kraften endast beror på de tre ovan uppräknade storheterna. Experimentellt kan man visa upp, att motståndskraften växer med stigande hastighet v, ökad yta (F) och med ökad täthet (ϱ) hos mediet. Vi antaga därför, att lagen kan skrivas

$$R = k \cdot F^x \cdot v^y \cdot \varrho^z,$$

där prop. faktorn k är en dimensionslös storhet. Motsvarande dimensionsekvation blir följaktligen

$$MLT^{-2} = L^{2x} L^y T^{-y} M^z L^{-3z}.$$

Alltså blir $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ eller $R = k \cdot F \cdot v^2 \cdot \varrho$.

Värdet av konstanten k beror på ytans form, vinkeln mellan ytan och rörelseriktningen och vilket måttsystem som användes. Lagen är användbar endast för måttliga hastigheter upp till 20 m/sek. Den gäller ej heller för små hastigheter.

Lyftkraft och motstånd vid aeroplanvingar.

Blåses en luftström emot ett plan, som bildar en vinkel mindre än 90° med strömriktningen, eller planet på motsvarande sätt föres fram genom den stillastående luften, kommer luftkrafternas resultant R ej att vara vinkelrät emot ytan, ej heller verkar den i ytans tyngdpunkt, utan som förut påpekats i en punkt närmare framkanten. Kraften kan emellertid alltid tänkas uppdelad i två komposanter, R_x i luftmotståndets riktning och R_y vinkelrätt däremot, lyftkraften (fig. 18).

För båda dessa komposanter gäller approximativt Newtons motståndslag d. v. s.

$$R_x = k_x \cdot \varrho \cdot F \cdot v^2; \quad R_y = k_y \cdot \varrho \cdot F \cdot v^2.$$

Koefficienterna kallas motstånds- resp. lyftkraftskoefficienten. Dessa lyft- och motståndskrafter resp. koefficienter vid olika vinkel α kunna lätt uppvägas t. ex. med Rollers förut beskrivna anordning (fig. 16).

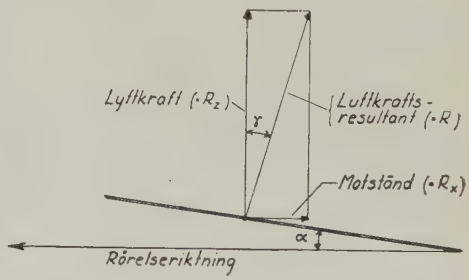


Fig. 18. Luftkrafter å plan skiva.

De äldsta aeroplanen voro försedda med plana vingar. För att man med dem skall kunna få någon lyftkraft, måste de ställas snett emot rörelseriktningen. Till en viss gräns gäller, att ju större α desto större lyftkraft, men samtidigt ökar även motståndskraften, eftersom virvelbildningen bakom planet då blir allt livligare.

Det är givet, att man vid aeroplanvingen vill ha samtidigt litet motstånd och hög lyftkraft, och detta kan således ej vinnas med plana ytor. Vi ha förut sett exempel på, att man genom att kläda in den plana ytan i en strömlinjeformad yta kan eliminera virvelbildningen. Gör man försök med den förut beskrivna fiskformade kroppen, finner man, att om den ställes snett för att därigenom alstra en lyftkraft, det strax uppkommer virvelbidning. Den snedställda plana ytan måste alltså klädas in på ett sådant sätt, att luften utan virvelbildning glider av ytan samtidigt med att den önskvärda lyftkraften bibehålles.

En rysk ingenjör Joukovski kom på den idéen att göra vingprofilen strömlinjeformad men böjd (se fig. 19). Genom strömningsförsök i vatten kring en dylik profilmodell övertygar man sig lätt, att vätskan vid lämplig ställning av modellen flyter förbi utan virvelbildning, man konstaterar

också, att hastigheten intill vingens konvexa översida är större och på den konkava undersidan mindre än i den opåverkade delen av strömningen. Enligt Bernoullis sats måste det därför på översidan råda undertryck och på

Fig. 19. Strömning kring aeroplanvinge utan virvelbildning. Hastigheten vid översidan större, vid undersidan mindre än i ostörda strömningen.

undersidan övertryck, som båda verka lyftande på vingen. På framsidan verkar kraftkomposanter, som motverka rörelsen, eftersom strömningen där hejdas. Stegras vingens lutning, uppkommer virvelbildning, motståndet ökar och lyftkraften börjar avtaga (fig. 20).

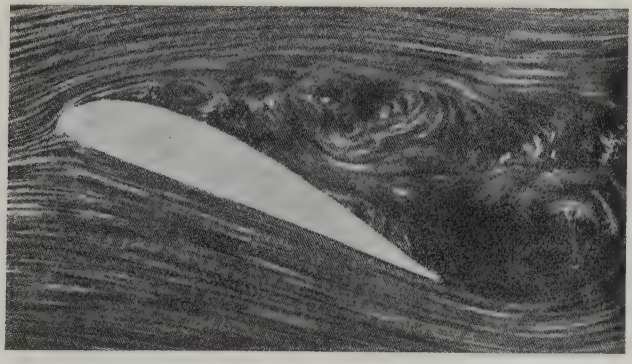


Fig. 20. Strömning kring aeroplanvinge vid stegrad lutning. Gränsskiktet avslites under stark virvelbildning.

Försök 13. Sedan en vingmodell av detta slag förfärdigats av trä, kan man med Rollers anordning väga lyftkraft och motståndskraft vid konstant vindhastighet och olika lutning av vingen. Lyftkraften erhålles med horisontal, motståndskraften med vertikal luftström (fig. 16). Tryckförhållandena kring vingen vid olika lutning demonstreras med Pitot- och Prandtlrör. Eftersom modellvingen ej är mycket stor gent emot tryckmätningsinstrumenten, får man säkrare resultat, om vingen förses med kanaler, som mynna ut på de ställen, där trycket skall mätas och som i tur och

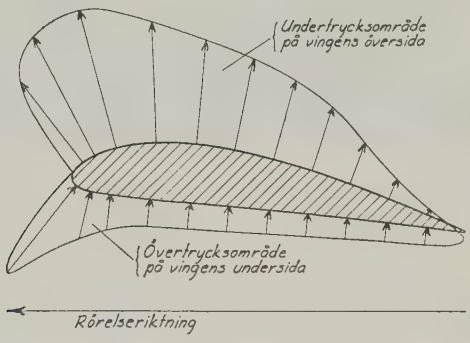


Fig. 21. Tryckfördelningen kring en vingprofil.

ordning kunna förbindas med mikromanometern. Vingen själv får tjäna som pitotrör. Fig. 21 åskådliggör tryckfördelningen kring en aeroplanvinge vid viss lutning och hastighet. Tack vare vingprofilens form är sugkraften på vingens översida omkring 3 gånger starkare än upptrycket på undersidan. Vingen bäres huvudsakligen av undertrycket på översidan.

Det genom vägningen erhållna mätresultatet sammanfattas lämpligen grafiskt i ett rätvinkligt koordinatsystem. I detta införas samhöriga värden på R_x och R_y och resultantens ändpunkt utmärkes. Geometriska orten för resultantens ändpunkt vid olika α-värden kallas vingens *polarkurva.* Polarkurvan ger upplysning om lämpliga vinkelinställningen av vingarna för start och landning, kurvtag-

ning, normal flygning, ryggflygning m. m. Då det skulle leda för långt, att här gå in på dessa frågor, hänvisar jag till Rollers och Malmers framställning.

Magnuseffekten och tennisbollens bana.

Bringas en cylinder att rotera i en stillastående vätska, uppkommer tack vare friktionen mellan gränsskiktet och vätskan en cirkulär strömning, fig. 22 a. Strömningen kring en stillastående cylinder framställes i fig. 22 b och fig. 12, om vi bortse från virvelbildningen bakom cylindern. Om både vätskan strömmar och cylindern roterar, antar strömlinjefiguren den form som fig. 22 c åskådliggör.

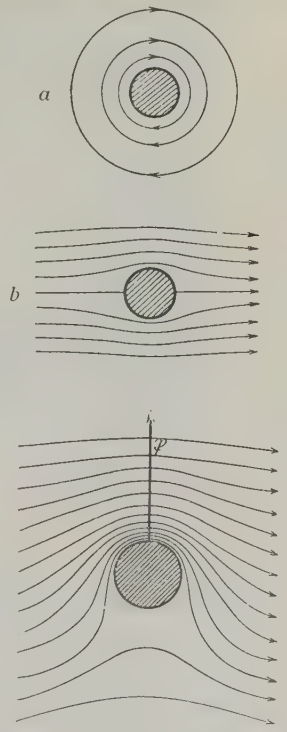


Fig. 22. Strömlinjer kring a) roterande cylinder i stillastående ideal vätska. b) stillastående cylinder i parallellt strömmande, ideal vätska. c) roterande cylinder i parallellt strömmande, ideal vätska.

Försök 14. Fig. 23 är reproducerad efter ett fotografi, taget vid ett laboratorieförsök. Virvelbildningen är som synes av underordnad betydelse. Av de båda sista strömlinjefigurerna framgår med all önskvärd tydlighet, att det på den roterande cylinderns ena sida uppkommer övertryck, strömlinjerna ligga där glest, på den mitt emot belägna sidan härskar däremot undertryck, strömlinjerna ligga tätt. Cylindern skulle därför av en resulterande kraft tryckas vinkelrätt emot huvudströmningen (fig. 22 c); i verkligheten (fig. 23) har kraften en komposant i huvudströmningens riktning. Denna re-

sulterande tryckeffekt kallas *Magnuseffekten.* En teknisk användning av Magnuseffekten har man i Flettnerrotorn, som för några år sedan var mycket omtalad.

Försök 15. Ett tunnväggigt cylindriskt papprör, 20 cm långt och 4 cm i diameter, förses vid ändytorna med cirkulära skivor av 6 cm diameter. Mitt på cylindermanteln viras ett snöre i några varv kring cylindern. Snörets fria ände

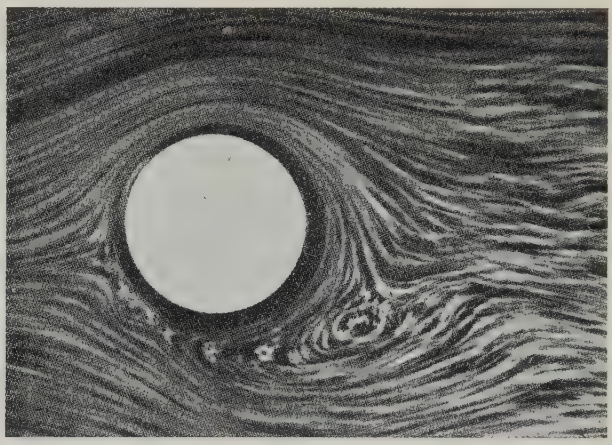


Fig. 23. Roterande cylinder i strömmande vatten. Gränsskiktet rives med runt cylindern och avgår nere till vänster. Magnuseffekten.

fästes i änden av en halvmeterlång käpp. Cylindern lägges på bordet, snöret hålles spänt. Då man nu hastigt för käppen snett upp åt höger, lyftes cylindern, föres åt höger och börjar samtidigt rotera. Cylindern följer emellertid ingen kastparabelbåge sedan snöret avrullats, utan lyftes kraftigare, om rotationsrörelsen är motsols (obs. luftströmmen riktad åt vänster). Man kan t. ex. lätt få pappcylindern att slå en ögla och därefter fortsätta i en flack kurva ned åt höger.

Ett bland tennis- och pingpongspelare välkänt fenomen är, att en skruvad boll — d. v. s. en boll, som genom slag

av racketen bibringats rotationsrörelse kring en axel genom bollens tyngdpunkt — ej fortsätter i det vertikalplan, i vilket bollen servades, utan avviker på grund av Magnuseffekten åt höger eller vänster om den oskruvade bollens banplan allt efter bollens rotationsriktning. Träffar slaget så, att bollen roterar kring en horisontell axel, avviker bollen nedåt eller uppåt från parabelbågen. Vid golfspel förekomma även dessa slag, då spelaren vill att bollen skall undvika vissa hinder.

Litteratur.

1. E. Roller, Schulversuche zur Fluglehre, Berlin 1936, RM 4: 60.
K. Schütt, Einführung in die Physik des Fliegens, Berlin 1935, RM 4: —.
Dessa båda arbeten äro enkelt och praktiskt uppställda och ge en utmärkt handledning i utförandet av demonstrations- och laborationsförsök (jfr. sid. 19).

2. I, Malmer, Elementär aerodynamik. Stockholm 1935, kr. 3: 25.
—, Teoretisk flyglära, Stockholm 1935, kr. 4: 25.
Lämpliga för mer försigkomna elever till fördjupat studium.

3. E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Bd I, 7: e (1929) o. senare uppl.
A. Berliner, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung, 5: e Aufl. Berlin 1934.
Dessa två modärna läroböcker innehålla större partier, ägnade åt läran om vätskors och gasers strömning. Vissa delar av framställningen kunna med behållning läsas av eleverna.

4. B. Eck, Einführung in die technische Strömungslehre. I. Theoretische Grundlagen. Berlin 1935, kr. 7: 95.
—, Einführung in die technische Strömungslehre II. Strömungstechnisches praktikum. Berlin 1936, kr. 6: 85.
Utmärkta figurer och intressanta försöksbeskrivningar. Rekommenderas läraren till studium och hjälp vid elevernas handledning.

5. E. S. Johansen, Læren om Vædskers Bevægelse, København 1929, kr. 9: 50.
Utgör en förträfflig framställning av hydrodynamiken utan tyngande matematik. Rekommenderas de lärare, som vilja skaffa sig djupare insikt. Arbetet är skrivet som lärobok i vätskors rörelse för allmänna kursen i fysik vid den polytekniske Læreanstalt i Köpenhamn.

6. W. Wien u. F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV: 1, 2, 3, 4, Hydro- und Aerodynamik.
Lämplig som uppslagsbok.
Illustrationerna i denna uppsats äro hämtade ur ovan nämnda arbeten.

Några reflexioner kring vårens studentuppgifter i matematik.[1]

Av **HJALMAR OLSON.**

Efterföljande tankar och reflexioner med anledning av vårterminens studentuppgifter på reallinjen i matematik, allmän kurs och specialkurs, skola koncentrera sig på besvarandet av huvudsakligast följande tre frågor:

1) angående lämpliga antalet uppgifter i det skriftliga provet på specialkursen,

2) angående uppgifternas innehåll och formulering med hänsyn till avvägningen mellan de båda matematikkurserna på reallinjen samt

3) den viktigaste, angående uppgifternas formulering med hänsyn till deras bedömning.

Från och med vårterminen 1937 har den förändringen vidtagits beträffande den för alla reallinjens lärjungar gemensamma kursen i matematik, att antalet uppgifter satts till 8 i stället för förut 9; skrivtiden är som förut sex timmar, och minst tre nöjaktigt behandlade uppgifter fordras för godkännande. Mot den vidtagna förändringen torde ingen invändning kunna göras. Den är särskilt lämplig därför, att det nu torde kunna förväntas enhetligare bedömningsgrunder för de högsta betygen a och A. Det var nog så förut, att medan på sina håll 9 nöjaktigt behandlade uppgifter uppställdes som oavvisligt villkor för högsta betyget, på andra håll detta vitsord kunde ges även åt 8 nöjaktigt behandlade uppgifter. Hädanefter torde väl som regel 7 exempel reserveras åt a och 8 åt A.

Beträffande specialkursen hade denna sin debut i studentexamen sistförflutna vårtermin, och någon föregående erfarenhet fanns ej att bygga på, varför anordningen kan betraktas som ett experiment. Antalet uppgifter var 6, skrivtiden 5 timmar, och minst två nöjaktigt behandlade uppgifter krävas för B. Den betygsskala, som Skolöverstyrelsen torde ha tänkt sig och som väl i allmänhet tillämpats, är 3 uppgifter för Ba, 4 för AB, 5 för a och 6 för A. Ur proportionssynpunkt kan antalet 7 vara lika berättigat som 6 (6 tim : 5 tim = 8 uppgifter : $6\frac{2}{3}$ uppgifter), men det är särskilt

[1] Uppgifternas betydelse återfinnes bl. a. i tidskriftens junih. 1937, sid. 143.

av andra skäl jag skulle vilja föreslå, att antalet uppgifter i specialkursen sattes till 7. Ett skäl *för* det mindre antalet, som förekom denna gång, är att specialkursen omfattar ett mycket begränsat område. Skulle denna synpunkt, som dock kan anses mindre väsentlig, tillgodoses, borde det hellre ske genom ett utökande av antalet uppgifter i den allmänna kursen än genom ett nedbringande av antalet i specialkursen. Ett alltför ringa antal medför nämligen, att bedömningen lätt blir orättvis. Det torde nog vara en rätt så allmän erfarenhet man gjort av de s. k. halvdagsskrivningarna, att bedömningen blivit rätt vansklig, i den mån man vid dessa minskat antalet uppgifter, både med avseende på skrivningens omfattning och med hänsyn till fordringarna för olika vitsord. Det är nämligen så, att möjligheten att åstadkomma riktig svårighetsgrad på de olika uppgifterna, så att de efter en viss schablon fastställda vitsorden också motsvara lärjungarnas kunskaper, minskas avsevärt, om antalet uppgifter är för litet. Särskilt torde betyget Ba (3 uppgifter) ha varit alltför lätt att förvärva vid vårens studentskrivning i specialkursen. En större latitud för B torde i hög grad avhjälpa denna svårighet. Det förefaller som det vore lättast att vid författandet av uppgifterna träffa den rätta svårighetsgraden med hänsyn till olika vitsord, om följande betygsschema tillämpades vid bedömningen:

	B	Ba	AB	a	A
Allm. kurs	3 à 4	5	6	7	8
Spec. kurs	2 à 3	4	5	6	7

Beträffande bedömningen av studentskrivningarna i matematik äro vederbörande blott bundna av stadgans föreskrifter angående antalet nöjaktigt behandlade uppgifter för godkänd. För övriga betyg hava de bedömande fria händer, ehuru viss praxis utbildat sig, för allmänna kursen i enlighet med tablån ovan. Dock finnes det läroverk, där konsekvent 4 nöjaktigt behandlade uppgifter belönas med Ba, medan detta betyg i allmänhet ges för 4 uppgifter, endast om dessa äro mycket förtjänstfullt behandlade. Det vore synnerligen önskvärt, om Skolöverstyrelsen ville giva anvisningar på denna punkt, och de bedömande lärarna landet runt skulle utan tvivel med tacksamhet motse ett auktoritativt uttalande härom. Det kan ju ej anses formellt oegentligt, att den myndighet, som står för uppgifterna, även ger riktlinjer för deras bedömande. En dylik betygsschablon binder ju ej heller i det enskilda fallet utan möjliggör hänsynstagande till speciella omständigheter, som kunna korrigera betyget åt det ena eller åt det andra hållet.

Den andra frågan gäller uppgifternas innehåll och formulering

med hänsyn till avvägningen mellan den allmänna kursen och specialkursen. Frågan är ju ny i och med specialkursens införande. Det har från en del håll anmärkts, att ex. 8, allmän kurs, kunde lösas med tillhjälp av en formel ur analytiska geometrien och med kvotderivering, vilka hjälpmedel ej ingå i den allmänna kursen. Denna lösning var, anmärkningsvärt nog, angiven som huvudlösning i Svenska Dagbladet, medan den lösning, som tydligen var avsedd, blott var parentetiskt meddelad. Man har menat, att de, som läsa specialkursen, härigenom gynnats på ett orättvist sätt, då de utom det särskilda betyg de erhålla för sina utvidgade kunskaper i ämnet även få en särskild chans i provet för den allmänna kursen. Detta kan dock i och för sig ej betraktas som något fel, då det ligger i sakens natur, att den, som läst en utvidgad kurs i matematik, har ett försprång framför en annan vid ett prov i ämnets elementärare delar. Detta är ju också i full överensstämmelse med undervisningsplanen, då den anger, att repetitionen av specialkursen skall syfta »även till vinnande av större säkerhet beträffande den allmänna kursen.» För övrigt saknar väl frågan i det stora hela praktisk betydelse, då de båda kategorierna av lärjungar i regel ej komma att konkurrera med varandra efter studentexamen. Emellertid hindrar ju ej detta, att uppgifterna böra vara så formulerade, att de ej direkt inbjuda till att använda ej avsedda metoder. Nu är det nog så, att även sådana, som äro spekulanter på höga betyg, vid åsynen av orden »största» eller »minsta» gärna slå in på deriveringsmetod. Det är då förargligt och måste väcka ont blod, att metoden för en del av de prövande visar sig ej framkomlig, medan »specialisterna» kunna gå vidare på den inslagna vägen. På detta bör dock kunna rådas bot, dels genom att ge uppgifterna lämpligt innehåll, dels genom att formuleringen leder de prövande in på lämpliga vägar. Denna senare sida av saken, formuleringen, skall närmare behandlas i samband med den tredje frågan.

En annan uppgift, som i detta hänseende ansetts »malplacerad» är ex. 1, specialkursen. Den ger ej någon tillämpning på funktionslära eller analytisk geometri. Den är väl tänkt som prov på, om vederbörande äga större säkerhet beträffande den allmänna kursen, i detta fall trigonometri. Men även i så fall måste uppgiften anses som olämplig. Den kunde försvara sin plats i den allmänna kursen, som en medelsvår uppgift, men ej här. Då hade det trigonometriska ekvationssystemet, ex. 7, allmän kurs, varit mera försvarligt på specialkursen. Men även den uppgiften hade ej passat på denna plats. Uppgifterna böra enligt min mening gälla analytisk geometri och funktionslära. Undervisningsplanens krav på större

säkerhet beträffande den allmänna kursen kan mycket naturligt tillgodoses, genom att man låter uppgifterna bliva funktionslärans och analytiska geometriens tillämpningar på olika delar av den allmänna kursen. Kan för övrigt hos någon enskild abiturient misstänkas brister i detta avseende, torde den saken kunna tillfredsställande redas ut i det muntliga examensprovet.

Av allvarligare innebörd är frågan om uppgifternas formulering med hänsyn till deras bedömande. Särskilt i vårens matematikskrivningar har otydlighet i detta avseende hos flera av uppgifterna lett till att likvärdiga prestationer blivit olika bedömda vid olika läroverk.

Angående ex. 6, allmän kurs, ränteexemplet, hava somliga ansett, att det efterfrågade beloppet skall uttryckas i de storheter, som i uppgiften äro givna, i detta fall beloppet a kronor (0,973 a kr), medan ett uttryckande av det efterfrågade beloppet i den obekanta storheten kapitalet (12,6 % av kapitalet) ej ansetts nöjaktigt, åtminstone för de högsta betygen. Andra bedömande hava som nöjaktig godtagit vilken som helst av de båda behandlingarna.

Angivandet av lösningarna till det trigonometriska ekvationssystemet, ex. 7, allmän kurs, har skett på mångahanda sätt, mer eller mindre tillfredsställande, och vid bedömningen av uppgiften hava åsikterna divergerat rätt avsevärt. Även om sättet att ange lösningarna till ett ekvationssystem ibland kan vara en fråga av formell art, torde nog det i stor utsträckning förekommande oklara och obestämda angivandet av lösningarna, ofta med de obekantas värden meddelade utan inbördes sammanhang, bottna i bristande kunskaper om den egentliga innebörden av ett *rotsystem* till ett ekvationssystem.

Ex. 8, allmän kurs, har redan berörts i annat sammanhang. Vid bedömningen av en funktionsteoretisk behandling av uppgiften har fråga uppstått, hur mycket skall fordras av den ömtåliga diskussionen angående de båda maxima, som uppkomma.

Att i exempel 2, specialkurs, ej med ett ord i behandlingen beröra frågan om maximum och minimum, har på sina håll ej ansetts nöjaktigt för höga betyg, medan å andra håll en dylik behandling godtagits även för A.

I ex. 5, specialkurs, slutligen, skapar meningen »Sök orten för Q» stor villrådighet vid bedömningen. Somliga abiturienter meddela ortekvationen i mindre lämplig form utan någon som helst undersökning av dess geometriska betydelse, andra bringa den i konventionell form, vari betydelsen lyser fram, och åter andra ange närmare, ofta med figur, kurvans form och utseende. Även här råda bland bedömarna olika meningar.

Det är mindre då det gäller en skrivnings godkännande, än då det är fråga om de höga betygen, som åsikterna hos de bedömande gå isär. Nu spela emellertid i konkurrensen om inträde vid en del högskolor — i detta sammanhang tänker man då särskilt på Tekniska Högskolan — de höga betygen en oerhörd roll. Detta framgår bäst av den stora mängden efterprövningar, som företagas, även i stor utsträckning av sådana, som redan erhållit överbetyg i ämnet. Det kan ej förvåna, att en student tycker sig orättvist behandlad, då det a eller AB, han erhållit på sin skrivning, skulle ha varit A, om han tillhört ett annat läroverk. Det kan visserligen sägas, att full överensstämmelse och således full rättvisa aldrig kan nås beträffande vitsord, avgivna av olika examinatorer. Detta gäller särskilt det muntliga provet, där någon enhetlig kontroll ej förefinnes, då censorernas befogenhet ej sträcker sig till de höga betygen. Man skulle väl kunna säga, att de å studentbetyget upptagna vitsorden för de skriftliga proven utgöra ett slags korrektiv av den subjektivitet, som mer eller mindre måste vidlåda de övriga vitsorden. Detta understrykes också särskilt av läroverksstadgan, då den föreskriver, att vid avgivande av vitsord i ett ämne hänsyn också skall tagas till det skriftliga provet i ämnet. Det är därför av så mycket större vikt, att alla lämpliga åtgärder vidtagas för att göra bedömningen av de skriftliga proven så objektiv som möjligt. En avfattning av skrivningsuppgifterna, som utan vägledande direktiv leder till så växlande bedömning som i det föregående framhållits, vilket senare i sin tur leder till direkt påvisbara orättvisor, måste betraktas som ett missförhållande, i vilket det är nödvändigt att söka åstadkomma ändring.

I större städer med flera läroverk, t. ex. Stockholm, har det hänt, att vid diskutabla fall överenskommelse träffats mellan lärarna angående en uppgifts bedömande. Anordningen låter sig ej konsekvent och systematiskt genomföras för hela landet. Ej heller torde det vara lämpligt, särskilt av praktiska skäl, att Skolöverstyrelsen *efter* skrivningen på gjorda förfrågningar lämnar direktiv för bedömandet. Det enda framkomliga är, att uppgifterna få en sådan avfattning, att redan denna ger klara direktiv för bedömningen. Ansatser i den vägen hava nog förut tagits, t. ex. då uttrycket »Angiv samtliga lösningar till ...» förhindrat, att en behandling godtagits, som resulterat i att blott en del av lösningarna angivits. Det förefaller, som det vore nödvändigt, att överge den konventionella formuleringen av uppgifterna. Det bör närmare preciceras, dels vad som begäres i resultatet, dels vilka instrument, som få användas för uppgiftens behandling. Det förra kan ofta lämpligen ske genom att i exemplet giva facit. Det senare

kan åstadkommas på olika sätt. Ett sätt, som man ofta ser använt i utländska examensuppgifter, är en uppdelning av exemplet i underavdelningar, som så att säga tvinga in de prövande i bestämda spår. Ett annat sätt är att i uppgiften direkt ange begränsningen med avseende på metoden, t. ex. med uttryck sådana som »Angiv utan att lösa ekvationen ...», »Härled utan hjälp av derivata ...», »Lös med syntetisk metod följande geometriska problem.» etc.

Det är klart, att dylika i formuleringen angivna inskränkningar ej få drivas in absurdum, men använda med måtta och urskillning komma de avsevärt att bidraga till att skrivningsresultaten bli mera enhetligt bedömda. Det är ju meningen, att skrivningen skall utgöra ett prov på hur lärjungarna inhämtat kursen. Att formuleringen lämnar klart besked om vilket område de särskilda uppgifterna skola utgöra prov på, måste ju blott vara till fördel. Man behöver ej heller vara rädd för att dylika restriktioner, som föreslagits inlagda i exemplen, skulle lägga band på den matematiska fantasien, som examinanderna också böra få tillfälle att giva prov på. Eleganta eller originella lösningar finnes det alltid möjlighet att prestera. Snarare torde föreslagna restriktioner förhindra prestationer av rakt motsatt slag. Se t. ex. allt som måste godtas som »nöjaktig» behandling av ex. 1, allmän kurs!

Till belysning av principens praktiska tillämpning meddelas här omredigeringar av de i det föregående kritiserade uppgifterna, varigenom de enligt min mening bättre skulle tillgodose det berättigade kravet på åstadkommande av största möjliga enhetlighet vid bedömningen.

Ex. 1, allmän kurs. En rät kon, vars toppvinkel är 2α, är omskriven kring en sfär. Visa, att förhållandet mellan konens och sfärens volymer är $\dfrac{\cot\alpha}{4\,\mathrm{tg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$, och angiv ett närmevärde på detta uttryck med tre riktiga siffror, då $2\alpha = 49^\circ\,40'$.

Ex. 6, allmän kurs. Sista meningen ändras till: Till vilket belopp, uttryckt i a, måste nu ...

Ex. 7, allmän kurs. Lös ekvationssystemet $\left.\begin{aligned}\sin 3x+\sin 3y &= 1\tfrac{3}{8}\\ \sin x+\sin y &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}$, där x och y ligga mellan 0° och 360°, med tydligt angivande, hur olika x- och y-värden skola sammanföras till rotsystem.

(Det är ju ej nödvändigt att alltid begära alla lösningar. Då ändå denna uppgift får betraktas som svår med nuvarande kurs, kunde den angivna begränsningen av vinkelområdet vara lämplig.)

Ex. 8, allmän kurs. Sista meningen ändras till: Bestäm utan

användning av derivata den punkt på den andra linjen, från vilken man ser avståndet BC ...

Ex. 2, specialkurs. Bestäm konstanterna a, b och c, så att punkterna $\left(\frac{\pi}{6}, 4\right)$ och $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ ligga på kurvan $y = a\cos 2x + b\sin x + c$ och tangenterna till kurvan i dessa båda punkter gå parallellt med x-axeln. Visa dessutom, att en av dessa punkter är maximipunkt och den andra minimipunkt.

Ex. 5, specialkurs. Sista meningen ändras till: Visa, att orten för Q är en ellips och angiv läget av ellipsens medelpunkt.

Flera metoder att konstruera längden av en hyperbels konjugataxel.

Enligt en i denna tidskrifts senaste häfte införd notis finnes i en svensk lärobok (bland svaren till övningsexemplen) den av undert. i nästföregående häfte (mars 1937) påpekade elevlösningen av ovanstående uppgift. Detta torde icke förringa värdet av ifrågavarande elevs prestation, då ovan antydda exempel säkerligen undgått hans uppmärksamhet liksom den undgått min.

I tanke att möjligen locka fram nya lösningar gav jag samma problem — givetvis utan föregående preparation — i en nyligen anordnad matematisk uppsatsskrivning å lärosalen vid Vilans specialkurs för lantbruksstuderande. En lärjunge lämnade en lösning, som med uteslutande av därtill fogade figurer här må i sammandrag anföras: »Till ena grenen av hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ drages tangenten $y = kx - \sqrt{a^2k^2 - b^2}$ och genom den andra grenens vertex en med denna tangent parallell linje $y = kx \pm ak$. Härigenom bli dessa räta linjers ordinator i origo (resp. l_1 och l_2) bekanta, varefter man ur ekv. $l_1^2 = l_2^2 - b^2$ konstruerar b som ena kateten i en rätvinklig triangel, där l_2 är hypotenusa och $|l_1|$ den andra kateten.»

En annan lärjunge behandlade visserligen ej uppgiften i sin skrivning men hade till påföljande lektion funderat ut en i korthet så lydande lösning: »Då b är den storhet vi söka, betraktas x och y såsom bekanta i hyperbelns ekv., som kan skrivas $(x^2 - a^2) : a^2 = y^2 : b^2$ eller $\pm \sqrt{x^2 - a^2} : a = y : b$. Låta vi nu x och y föreställa koordinaterna för en godtyckligt vald punkt på kurvan, kan således b konstrueras som fjärde proportional till de på vanligt sätt erhållna sträckorna $\sqrt{x^2 - a^2}$, a och $|y|$.»

Den i marshäftet behandlade metoden är tydligen ett specialfall av sist anförda. Ett annat lika enkelt specialfall fås genom att välja $x = a\sqrt{5}$, som ger $y = \pm 2b$. Sträckan $a\sqrt{5}$ konstrueras enklast direkt i figuren som hypotenusa i en rätvinklig triangel med kateterna a och $2a$. Sedan är det en lätt sak att draga ordinatan till den punkt på kurvan, som har abskissan $a\sqrt{5}$, varigenom uppgiften är löst.

Inclusive den kända metod som bygger på formeln $ak_1 . ak_2 = b^2$ (se t. ex. Wahlgrens lärobok) ha vi nu anfört fem olika sätt att konstruera längden på en hyperbels konjugataxel, då endast själva kurvan och dess symmetriaxlar äro givna. För fullständighetens skull må till sist en metod meddelas, som framgår ur den enda återstående användbara formeln innehållande b, nämligen tangentens ekv. i formen $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$.

Tangeringspunkten $x_1 \mid y_1$ väljes efter behag, varefter tangentens avskärning (x_2) med x-axeln konstrueras enligt analogin $x_1 : a = a : x_2$. Tangenten kan nu dragas och därmed är dess ordinata i origo $l = -b^2 : y_1$ bestämd. Slutligen konstrueras b såsom medelproportional till de två kända sträckorna $\mid y_1 \mid$ och $\mid l \mid$.

Av samtliga ovannämnda konstruktionsmetoder äro de, som erhållas genom att kombinera ekv. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ med $x = a\sqrt{2}$ eller $x = a\sqrt{5}$ tvivelsutan de enklaste.

Gust. Forsström.

Ett existensbevis för talet *e*.

Talet e definieras som bekant som gränsvärdet av $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, då n växer obegränsat. Det gängse beviset bygger på utvecklingen av A_n enligt binomialteoremet, ett teorem, som kanske enklast erhålles med tillhjälp av differentialkalkylen, och ofta användes även teorin för oändliga serier vid bevis enligt denna metod. Talet e är emellertid ofta en av de första storheter, som en studerande i infinitesimalkalkyl konfronteras med. Det har då kanske sitt intresse att ge ett bevis, som algebraiskt stöder sig på den enkla satsen $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ och infinitesimalt på satsen, att varje begränsad monoton följd har ett gränsvärde.

Vi bevisa först, att följden A_n är växande, d. v. s. $A_{n+1} > A_n$ för varje värde på n. För korthets skull kalla vi $1 + \frac{1}{n}$ för a

och $1+\frac{1}{n+1}$ för b. Med dessa beteckningar gäller:

$$A_n = a^n,\ A_{n+1} = b^{n+1},$$

$$A_{n+1} = A_n + (b^{n+1} - a^n) = A_n + (a^{n+1} - a^n) - (a^{n+1} - b^{n+1}) =$$

$$= A_n + a^n(a-1) + (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n),$$

eller med aktgivande på värdena för a och b:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{n}a^n - \frac{1}{n}\cdot\frac{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n}{n+1}. \qquad (1)$$

Emedan $a > b$, äro alla termer (med undantag av den första) i täljaren till det sista bråket i (1) mindre än a^n och alltså även deras medelvärde mindre än a^n, varav åter inses, att det numeriska värdet av den sista termen i (1) är mindre än den näst sista termen. Därmed är också bevisat

$A_{n+1} > A_n$, d. v. s. A_n bilda en växande följd.

För existensbeviset återstår endast att bevisa, att följden A_n icke växer i det oändliga. Säkerligen är det direkta påvisandet av en gräns ej särskilt svårt; emellertid lämnar den använda metoden själv en sådan. Om vi nämligen i (1) istället ersätta varje term i det sista bråket med b^n erhålles:

$$A_{n+1} < A_n + \frac{1}{n}a^n - \frac{1}{n}b^n < A_n + \frac{1}{n}a^n - \frac{b^{n+1}}{na} =$$

$$= A_n + \frac{1}{n}a^n - \frac{1}{n+1}b^{n+1},$$

eller

$$A_{n+1} < A_n + \frac{1}{n}A_n - \frac{1}{n+1}A_{n+1},$$

alltså

$$A_{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < A_n\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Talen $B_n = A_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ bilda alltså en avtagande följd, och dessutom gäller $B_n > A_n$.[1] Båda följderna måste alltså vara begränsade och ha gränsvärden, vilka för övrigt måste vara lika. Härmed är existensen av $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ klarlagd.

[1] Den införda hjälpföljden B_n har även självständig betydelse. Det gäller nämligen $B_{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Metoden ger dessutom en uppskattning av riktig storleksordning av den noggrannhet, varmed A_n approximerar e. Då $A_n < e < B_n$, gäller $e - A_n < B_n - A_n = \frac{1}{n} A_n$. Felet är alltså högst av storleksordningen $\frac{1}{n}$. En utveckling av $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ i serie av $\frac{1}{n}$ visar, att felet verkligen är av denna storleksordning.

Viktor Bergström.

Kundts rör.

Vid försök med Kundts rör kan man använda stavar och rör av mindre storlek än den vanliga. Jag har vunnit utmärkta resultat med 0,5 meter långa stavar av mässing, järn eller glas med 0,5 cm diameter. Glasstaven kan utbytas mot ett glasrör, vars längd är 0,5 meter och yttre diameter 1 cm. Metallstavarna gnidas med en hartsad yllelapp och glasröret med två i vatten fuktade, urgröpta korkskivor, som sammanhållna av en gummisnodd omsluta röret. Stavarnas ena ände med en påträdd liten kork införes i mynningen av ett glasrör av 4 dm längd och 1,5 cm inre vidd. Särskilt mässings- och glasstavarna sätta vid resonans det torra och siktade korkfilspånet i livlig rörelse. Man kan också ha korkfilspånet i 3 dm långa glasrör med 1 cm inre vidd. Stavarna införas då utan påträdd kork i rörmynningen. Stavar och rör fästas i stativ.

Vid lärjungelaborationer blir med ovan angivna dimensioner utrustningen ej skrymmande, och endast en elev behöves för att gnida staven och samtidigt flytta den lättrörliga kolven i röret.

Om man strax utanför glasröret med korkspån (särskilt det finare röret) håller en visselpipas ljudhål erhållas vid anblåsning — som lämpligen sker genom en gummislang — och avstämning vackra stoftfigurer. Pipans ton får ej vara för låg. Man fäster pipan i horisontell ställning i ett stativ och för ljudhålet så långt åt sidan, att luftströmmen ej går in i glasröret och stör korkspånsfigurerna. Hos längre visselpipor (omkring 12 cm luftpelare) kunna på detta sätt övertonernas svängningstal studeras.

Vid försök med en kort signalpipa (från Norstedt & Söner) med långt inskjuten kolv erhölls toner, vilkas svängningstal översteg 10 000 svängningar pr sek.

Carl Rendahl.

Om en generalisering av Wheatstones brygga.

Uppgift nr. 7 i studentskrivningen i fysik våren 1937 ger mig anledning erinra om Frölichs generalisering av Wheatstones brygga. Denna eleganta sats är upptagen i en del större läroböcker och handböcker i fysik men torde vara obekant för flertalet av tidskriftens läsare. Satsen lyder så:

> I ett kvadratiskt ledningsnät med diagonala ledningsförbindelser må samtliga ledningar, sidor såväl som diagonaler, innehålla ohmska motstånd och konstanta elektromotoriska krafter. Om strömstyrkan i den ena diagonalen blir oförändrad, då strömmen brytes i den andra diagonalen, så är produkten av motstående sidors ohmska motstånd lika.

Såsom framgår av det följande, kan satsen ytterligare generaliseras (utan att beviset försvåras) så, att »brytning av strömmen» kan ersättas med »förändring av den elektromotoriska kraften eller av det ohmska motståndet» i diagonalen ifråga.

Beviset för Frölichs sats återfinnes på flera ställen.[1] Nedanstående är ett försök till förenkling av beviset.

ABCD i fig. 1 är det kvadratiska ledningsnätet med dess diagonaler; i alla sex ledningarna må förekomma ohmska motstånd $r_1 \ldots r_5$ (motståndet i *AC* ingår ej i kalkylen) och konstanta elektromotoriska krafter (ej markerade i fig.). I *BD* är inkopplad en strömmätningsapparat och i *AC* en strömbrytare eller anordning för ändring av elektromotoriska kraften eller motståndet. Strömstyrkorna (se pilarna) i *AB*, *BD* och *DA* äro resp. x, i och y.

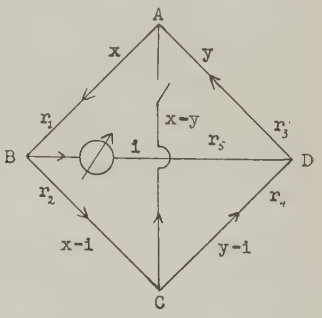


Fig. 1.

Ur Kirchhoffs första lag erhålles strömstyrkorna i *BC*, *CA* och *CD* resp. $x - i$, $x - y$, $y - i$. Om E_1 och E_2 äro algebraiska summan av elektromotoriska krafterna i kretsarna *ABDA* och *BCDB*, ger Kirchhoffs andra lag

$$E_1 = r_1 x + r_3 y + r_5 i; \qquad E_2 = r_2(x - i) + r_4(y - i) - r_5 i$$

eller

$$E_1 - r_5 i = r_1 x + r_3 y; \qquad E_2 + i(r_2 + r_4 + r_5) = r_2 x + r_4 y \qquad (1)$$

[1] O. Frölich, Wied. Ann. *30*, 156, 1887; L. Graetz, Handb. d. Elektr. etc. B II, 72, Leipzig 1921; Chwolson, Lehrb. d. Physik Bd IV: 1, 518, Braunschweig 1908.

Här kunna vi betrakta x, y och i som funktioner av motståndet (event. brytning av strömmen) och elektromotoriska kraften i diagonalen AC. Förändra dessa, och låt x', y' och x_0, y_0 vara två värdepar, som giva samma strömstyrka, i, i BD. Man har då

$$E_1 - r_5 i = r_1 x' + r_3 y' = r_1 x_0 + r_3 y_0,$$

$$E_2 + i(r_2 + r_4 + r_5) = r_2 x' + r_4 y' = r_2 x_0 + r_4 y_0.$$

Härav

$$r_1(x' - x_0) = r_3(y_0 - y') \quad \text{och} \quad r_2(x' - x_0) = r_4(y_0 - y')$$

och efter division

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}, \quad \text{eller} \quad r_1 r_4 = r_2 r_3, \tag{2}$$

varmed Frölichs sats är bevisad.

Låt oss omvänt utgå från att relationen (2) är uppfylld. Man får då genom förlängning med x och y och korresponderande addition

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1 x + r_3 y}{r_2 x + r_4 y}$$

och ur denna ekv. och ekv. (1) efter division

$$\frac{E_1 - r_5 i}{E_2 + i(r_2 + r_4 + r_5)} = \frac{r_1 x + r_3 y}{r_2 x + r_4 y} - \frac{r_1}{r_2}.$$

Denna ekv. visar, att i nu endast är bestämd av E_1, E_2, $r_1 \ldots r_5$, d. v. s. helt oberoende av de förändringar, som vidtagas i AC.[1]

Flera brygganordningar grunda sig på specialfall av Frölichs sats. Wheatstones brygga (från 1844) är den enklaste. En annan anordning (Mance 1871) är mindre bekant, trots att den sedan länge finnes angiven i bl. a. Kohlrauschs Praktische Physik. Metoden avser mätning av ett elements inre motstånd. BD i fig. 2 är mättråden i en vanlig Wheatstones brygga. En galvanometer är inkopplad mellan B och D. Man uppsöker en sådan punkt på tråden, att galvanometerns utslag ej ändras, då kontakten vid C brytes. Frölichs sats ger då omedelbart elementets inre motstånd, då detta är i funktion. — Skulle strömmen genom galvanometern bli för stark, kan man i galvanometerledningen in-

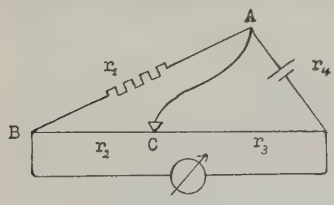


Fig. 2.

[1] Såsom visats av A. Rosén, Övers. av Vetenskapsak. Förh. 1887, 203 och av S. Kalischer, Wied. Ann. *46*, 113, 1892 kan man på enkelt och elegant sätt erhålla Frölichs sats ur lagen för Wheatstones brygga (ekv. 2) med hjälp av superpositionsprincipen.

koppla ett element som motelektromotorisk kraft eller också ett stort motstånd. Enl. Frölichs sats är detta tillåtet. Bestämning av inre motstånd enl. Mance är en lämplig laborationsuppgift.

Uppg. nr. 7 i studentskrivningen i fysik våren 1937 är som synes en beskrivning av Mance's metod. Uppgiften lyder så:

> Inre motståndet hos ett element kan bestämmas enligt följande metod. Elementets poler, A och D, förenas genom tre seriekopplade motstånd, $AB = r_1$, $BC = r_2$ och $CD = r_3$. Mellan B och D inkopplas en voltmeter med mycket stort motstånd. Motstånden r_1, r_2 och r_3 avpassas så, att voltmeterns utslag ej ändras, om punkten C bringas i kontakt med A. Visa, at det sökta motståndet då är lika med $\frac{r_1 r_3}{r_2}$.[1]

Några erinringar angående uppgiften må göras. Uttrycket »bringa i kontakt med» tolkades av eleverna dels såsom »kortslutning», dels såsom »förbindning med ett motstånd av godtycklig storlek». I första ögonblicket torde lite var ha frapperats av att den senare tolkningen var tillåten. Frölichs sats visar, att så är fallet. Av satsen framgår även, att strömmätningsinstrumentet kan vara vilket som helst och ej behöver vara en »voltmeter med mycket stort motstånd». Problemförf. torde ha angivit ett dylikt instrument endast för att möjliggöra enklare räkningar.

C. E. Blom.

Om bildningen av underklorsyrlighet.

I större upplagan av den lärobok i kemi, som utgivits av dr. Bolin och undertecknad, ha vi förklarat bildningen av underklorsyrlighet och klorvätesyra vid upplösandet av klor i vatten genom antagandet, att klormolekylen dissocieras i en positiv och en negativ klorjon, varav den förra förenar sig med hydroxyljoner från vatten till underklorsyrlighet enligt formeln:

$$Cl^+ + Cl^- + H^+ + OH^- = HOCl + H^+ + Cl^-.$$

Jag har sedan träffat kolleger, som opponerat mot denna förklaring. Det är givet, att antagandet av positiva klorjoner verkar främmande. Saken är dock ej så märklig sedd från den moderna elektronteoriens ståndpunkt. Den litteratur om elektronteorien, som finns på svenska språket, är emellertid mycket tunnsådd, och jag känner faktiskt inte till någon något så när uttömmande fram-

[1] Om r_3 utbytes mot r_4, överensstämmer uppgiftens beteckningar med de ovan använda (fig. 2).

ställning av teoriens element. Däremot finns det en hel del litteratur på engelska språket och särskilt må då nämnas HUNTER: The electronic theory of chemistry. I Journal of chemical education för år 1936 finns en mycket intressant artikel med många litteraturanvisningar.

Det är ej min avsikt att här ge någon framställning av elektronläran, jag vill endast referera en uppsats av prof. W. NOYES, U. S. A., som finns att läsa i Zeitschrift für angewandte Chemie, nr. 45, 1931, och som handlar om reduktion och oxidation som elektronförlopp. I denna uppsats redogör förf. för en av honom utförd undersökning över klorens dissociation i vatten. Enligt elektronteorien kan klorens molekyl skrivas:

som alltså innebär, att det yttersta elektronhöljet utgöres av 14 elektroner, och att de två kloratomerna var och en har samma konfiguration som en ädelgas med 8 elektroner, av vilka två äro gemensamma för de båda kloratomerna. Den fullständiga elektronformeln för en kloratom är följande

Kloratomen övergår till en negativ jon genom upptagande av en elektron

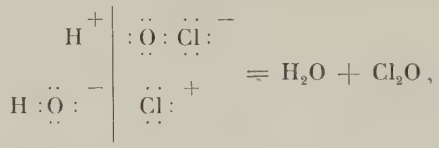
I ovanstående formel för klormolekylen ha endast de elektroner, som tillhöra den yttersta elektronkretsen, tagits med. Dissociationen av klormolekylen sker enligt formeln

Vatten dissocieras på följande sätt:

Positiva vätejoner och negativa klorjoner bilda dissocierad klorvätesyra, under det att negativa hydroxyljoner och positiva klorjoner bilda den föga dissocierade underklorsyrligheten:

Efter denna uppfattning måste underklorsyrligheten vara am-

foter och dels dissocieras i positiva väte- och negativa underklorsyrlighetjoner på vanligt sätt, dels dissocieras i positiva klorjoner och negativa hydroxyljoner. Det experimentella beviset för riktigheten härav gavs genom konstaterandet, att gasfasen över en lösning av underklorsyrlighet innehåller klormonoxid, Cl_2O. Den enda enkla förklaringen till detta faktum är, att följande reaktion äger rum:



d. v. s., två molekyler underklorsyrlighet, varav den ena är dissocierad på första sättet, den andra på det andra sättet, reagera med varandra till vatten och klormonoxid.

Bror Gustaver.

Bokanmälningar.

Olösta gåtor och aktuella problem. Sjuttiosex uttalanden i Svenska Dagbladets enquête om naturforskningens nuvarande uppgifter och framtida mål. Wahlström & Widstrand, Stockholm 1937, 302 sid., kr. 6:75.

Den som deltagit i en vetenskaplig kongress, ett naturforskaremöte, en »Tagung» eller en annan dylik större sammankomst, som kanske arbetat på olika sektioner med flera samtidiga föredrag, noterar helt visst efteråt som största behållning *icke* det koncentrerade nya vetande i många specialfrågor, som en lång rad föredragshållare lyckats servera under sina 10 min. långa föredrag, *utan* snarare förmånen att få identifiera och träffa de forskare, vilkas verksamhet man haft anledning taga del av. Har man sålunda en gång råkat mannen bakom verket, blir detta sedan allt framgent på ett särskilt sätt levande och intressant.

Svenska Dagbladet anordnade nyligen en stor naturvetenskaplig enquête. Ett antal framstående forskare inom naturvetenskapens olika grenar i in- och utlandet tillfrågades bl. a. om vilka luckor, som i främsta rummet borde utfyllas i vårt vetande på deras forskningsområde, och om vilka problem, som voro mest aktuella och betydelsefulla. Icke mindre än 76 svar publicerades i tidningen.

Dessa svar ha nu samlats och utgivits i en bok, som fått den fantasieggande titeln »Olösta gåtor och aktuella problem».

Att läsa boken är som att deltaga i en stor, välordnad kongress. Man kommer ansikte mot ansikte med varje föredragshållare, ty hans drag återgives efter fotografi, och alla viktigare biografiska data finnas samlade. Man uppfattar varje ord och slipper att gå miste om intressanta förhandlingar i en parallellt arbetande sektion. Man hinner med allt utan att jäkta eller tröttas, och kostnaden för resa och uppehåll är obetydlig.

Att i korthet referera innehållet vore att göra en otjänst åt de områden, som icke finge plats i referatet. Och likväl är det mycket frestande att antyda, att Aston framställer frågan huruvida atomernas latenta energi kan frigöras, Donnan tippar 10 frågor, som komma att bli förgrundsproblem under de närmaste årtiondena, Bertil Lindblad söker lyfta våra blickar »från skumrask och trånga vyer till de stora viddernas oändligt rika och storslagna skådespel», något varuti han framgångsrikt sekunderas av Knut Lundmark och Russell. Men även andra vetenskaper kunna bjuda på liknande sensationer, vilket demonstreras av en rad entusiastiska och vidsynta fysiker, kemister, fysiologer, läkare, geologer och filosofer.

Boken är i sin art en (på vårt språk) sällsynt företeelse, som måste hälsas välkommen, och den kan anbefallas ej mindre åt dem, som bruka kongressa, än även åt dem, som inte göra det.

J. Tandberg.

Gunnar Aspelin, *Tankelinjer och trosformer*, Del VI i Vår egen tids historia. Albert Bonnier, Stockholm 1937, 608 sid., häft. kr. 18:—.

Det ligger långt ifrån referentens avsikt att vilja kritiskt granska hela detta omfattande arbete, då härför skulle krävas djupgående studier i många vitt skilda kunskapsområden, som det torde vara ytterst få förunnat att överblicka. För många människor torde dock en överblick av de vetenskapliga landvinningar, som lett fram till den stormuppfyllda brytningstid, sm vi nu genomleva i avseende på uppfattningen av oss själva och den värld vi leva i, vara deras stora längtans mål. Otvivelaktigt kommer därför detta arbete att mottagas med största tacksamhet av alla dem, som i vår av mekanisering och jäkt söndertrasade tid ännu kunna samla sina intressen kring tillvarons djupaste problem.

Jag vill här närmast rikta uppmärksamheten på den del av arbetet, som avhandlar »fysikens världsbild». Författaren har ställt

som sitt mål att klargöra uppkomsten och utvecklingen av de tankelinjer, som på grundvalen av den fysikaliska forskningen lett fram till den världsbild, som för närvarande håller på att utkristalliseras. På 50 sidor lämnas i sammanträngd form en översikt av fysikens historia ända fram till senaste år, och så vitt jag vet finnes icke förut något motsvarande arbete pa vårt språk. Någon fullständighet kan det givetvis inte vara tal om, då det här endast gällt att framhålla de moment, som för utformningen av världsbilden varit de betydelsefullaste. Uppgiften hör ingalunda till de lättaste, och desto större blir därför nyfikenheten på resultatet, då förf. icke är fysiker av facket. Först som sist måste då sägas, att förf. enligt min uppfattning har löst denna uppgift på ett synnerligen förtjänstfullt sätt. De epokgörande upptäckterna avhandlas på ett klart och lätt begripligt sätt, och framställningen tynges icke av matematiska formler, som på många verka avskräckande. Man kan ju visserligen säga, att ett och annat borde hava utförligare behandlats men med hänsyn till den breda publik, till vilken arbetet i första rummet riktar sig, har förf. på ett lyckligt sätt begränsat sitt ämne. Även den, som är något bevandrad i den stormande utvecklingen av fysiken i vår tid, torde kunna hava både nytta och nöje av denna resumé av de stora händelserna. Att på några ställen vedertagen terminologi icke begagnas, t. ex. då accelerationen benämnes »rörelseökning» och då i stället för reflexion användes uttrycket »böjning», kan ju icke anses lämpligt och torde knappast av pedagogiska skäl kunna motiveras. Men i stort sett måste man vara förf. tacksam för att de i populära arbeten ofta förekommande vanställande omskrivningarna icke begagnas. Beklagligtvis är det så, att vissa kapitel i den modärna fysiken knappast äro tillgängliga för populär framställning. Med älskvärd uppriktighet bekänner förf. i fråga om relativitetsteorien sin oförmåga att lämna en fullständig översikt av denna lära, och många för att icke säga flertalet fysiker skulle nog kunna förena sig med honom i denna bekännelse. Den grundlighet, med vilken förf. satt sig in i de behandlade problemen är höjd över allt beröm, och den klara medryckande stilen i hans framställning gör läsningen av hans bok till ett sant nöje.

Som redan framhållits anser jag mig ej kompetent att fälla något omdöme om arbetet i sin helhet, men jag torde ändå böra påpeka, att övriga kapitel, som utgöra bokens huvuddel, innehålla värdefulla översikter från många svårtillgängliga kunskapsområden, som för en och var, särskilt för pedagoger måste vara av allra största intresse.

T. E. Aurén.

GUNNAR OXENSTIERNA, *Sannolikhetens filosofi*, Verdandis småskrifter n:r 395, 70 s., 85 öre.

Sambandet mellan matematik och filosofi utgör ett vidlyftigt kapitel. När man går på djupet med ett matematiskt problem — liksom med ett fackvetenskapligt överhuvud —, stöter man icke sällan på ett filosofiskt. Var då det matematiska problemet slutar och det filosofiska börjar, kan icke alltid avgöras. Gränserna äro flytande. Dylika gränsområden äro av en viss betydelse även för matematiken. Icke så att de skulle utgöra några slags förutsättningar för den rent matematiska forskningen, utan på det sättet, att de grundläggande begreppen renas, vilket icke är utan vikt för specialforskningen.

Det ligger emellertid i sakens natur, att dylika gränsområden förutsätta samarbete mellan matematik och filosofi. Forskning inom ett sådant område förutsätter därför såväl matematisk som filosofisk skolning. Det har förekommit och förekommer väl ännu ibland, att undersökningar av matematikens grundvalar utföras utan grundlig matematisk skolning. Men det har också förekommit och förekommer i våra dagar icke så sällan, att det är den filosofiska skolningen som saknas. Resultatet blir i regel lika otillfredsställande i båda fallen. Tämligen grova misstag i matematiskt resp. filosofiskt avseende bli gärna följden.

I flera olika riktningar kan man nå gränsområden mellan matematik och filosofi. Inom geometrien ha vi frågorna om de geometriska fundamentalbegreppen, de geometriska axiomen, det geometriska beviset, »åskådningens» roll o. s. v. Exempel från andra grenar av matematiken äro frågorna rörande begreppen tal, oändlighet, kontinuitet, sannolikhet o. s. v.

Det sist nämnda begreppet har nyligen gjorts till föremål för en allmänfattlig undersökning av doc. G. Oxenstierna, en undersökning som torde intressera även matematikern av facket. Förf. är en av våra skarpaste och orginellaste yngre kunskapsteoretiker och har under lång tid ingående sysslat med sannolikhetsbegreppet. Han besitter grundlig skolning inom såväl filosofi, som är hans egentliga fack, som inom matematik och naturvetenskap.

Matematikens beräkning av sannolikheter bygger på att det enskilda fallets sannolikhet är bestämd. Vanligen definierar man den matematiska sannolikheten som förhållandet mellan antalet gynnsamma och antalet möjliga fall. Häri ligger dock en svårighet dold. De olika fallen måste vara lika berättigade, som man säger. De sex möjliga fallen vid ett vanligt tärningskast sägas vara lika berättigade. Men vad innebär då detta? Man får naturligtvis icke

säga, att fallen äro lika sannolika, ty det är ju dessa sannolikheter som skola bestämmas. Man måste på annat sätt avgöra saken, men hur? Om vi kunna konstatera, att tärningen är osymmetrisk eller att den kastas på något speciellt inträngt sätt, så anse vi icke fallen lika berättigade. Men det är nu likväl så, att tärningen alltid hålles på något visst bestämt sätt i utgångsläget och kastas på något alldeles bestämt sätt. Men i så fall måste den ju också falla på ett alldeles bestämt sätt. Vid varje kast synes alltså endast ett enda fall bli möjligt. Man säger då ofta, att man icke har något skäl att föredra något visst av fallen, vilka därför böra betraktas som jämställda. Detta har rent av formulerats som en särskild lag, »den felande grundens lag».

Att ett sådant resonemang, som är mycket vanligt, är logiskt ohållbart, visas övertygande i boken; det är »logisk alkemi» som Oxenstierna drastiskt betecknar det med ett uttryck från nationalekonomen Keynes. Orimligheten inses redan av att man får olika värden på sannolikheten för en viss händelse, beroende på hur man resonerar. Oxenstierna anför några roande exempel.

Det måste vara något grundläggande fel i det vanliga sannolikhetsbegreppet. Man har därför alltmera närmat sig den åsikten, att den matematiska sannolikheten icke är något som kan a priori bestämmas, utan att den är något som bygger på erfarenheten.[1] Denna s. k. frekvensteori synes ge den matematiska sannolikhetsberäkningen en säker logisk grundval. Den innebär dock en ganska betydande revision av sannolikhetskalkylen. Man brukar ju t. ex. betrakta Bernoullis teorem som en matematisk förklaring av »de stora talens lag». Enligt frekvensteorien utgör i stället denna lag utgångspunkten, som de matematiska beräkningarna förutsätta.

Sannolikhetsbegreppet är dock icke uppklarat i och med frekvensteorien. Då man talar om sannolikhet, avser man icke alltid frekvens. Enklast kanske man inser detta, om man observerar, att frekvensberäkningar alltid hänföra sig till förflutna händelser och aldrig till framtida. Men man kan dock tala om sannolikhet beträffande framtida händelser.

Om jag säger, att jag i morgon sannolikt kommer att resa bort, så har detta ingenting med frekvens att göra. Men det har dock en viss innebörd. Jag *vet* icke, om jag kommer att resa. Händelser kunna inträffa, som hindra mig eller som föranleda mig att inhibera min resa. Men å andra sidan är det icke fråga om den rena ovetenheten. Om intet oförutsett inträffar, så kommer jag att resa.

[1] Jfr Edvard Göransson, Sannolikhetsräkning på empirisk grundval, denna tidskrift årg. 1929—33.

Det föreligger här alltså flera möjligheter, och jag vet icke vad som verkligen kommer att ske. Men jag bestämmer mig dock för en av möjligheterna. Detta är enligt Oxenstierna innebörden av det vanliga sannolikhetsbegreppet.

En dylik sannolikhet kan givetvis icke talmässigt bestämmas. Då det gäller att beräkna sannolikheter, är det alltid fråga om frekvenser. Men detta sannolikhetsbegrepp har en utomordentligt stor betydelse icke blott i det praktiska livet utan också i vetenskapen. Oxenstierna avslutar sitt arbete med en kort redogörelse härför, varvid han även berör den aktuella frågan om kausalitetsbegreppet inom den nyare fysiken.

Den lilla boken, om vars innehåll endast en ofullständig uppfattning kan erhållas genom ovanstående, rekommenderas varmt till alla matematik- och fysiklärares studium. Svårigheter återstå givetvis för den teori, som Oxenstierna framställt, men det förringar icke bokens värde. Man avvaktar endast med desto större intresse doc. Oxenstiernas länge emotsedda stora vetenskapliga arbete om sannolikhetsbegreppet. *C. E. Sjöstedt.*

Hakon Lund og Hans Rasmussen: *Kemi for Gymnasiet.* Femte Udgave. Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag, København 1937, 161 sid., kr. 6:75.

I denna danska lärobok återfinner man vår vanliga gymnasiekurs i tämligen förkortad form. I synnerhet metallerna äro ovanligt knapphändigt behandlade, liksom överhuvud den tillämpade kemien. Utförligare behandlas den teoretiska delen, speciellt reaktionsläran samt begreppen syra och bas, där Brönsteds framställning följes, och det numera så betydelsefulla pH-begreppet. En samling goda frågor och räkneuppgifter avsluta boken. Dennas sammanträngda framställningssätt gör dock det hela något katekesartat, i synnerhet som alla experiment och laborationsövningar sammanförts till bokens början. Denna experimentella del är emellertid en guldgruva, där många utmärkta försök äro att finna, som ge oss svenska kemilärare nya och trevliga uppslag, i synnerhet som den behövliga apparaturen är mycket enkel. Just för dessa stimulerande experiments skull rekommenderas boken åt intresserade kolleger. — Priset är högt i förhållande till bokens storlek och enkla utstyrsel. *E. Nordefeldt.*

J. K. Eriksen og P. Pedersen, *Astronomi for Gymnasiet.* J. H. Schultz, Köpenhamn 1937, 108 sid., kr. 4:25.

Boken är enligt företalet avsedd för andra och tredje gymnasieklassen på den matematisk-naturvetenskapliga linjen. Enligt under-

visningsplanen 1935 omfattar kursen stjärnhimlens utseende och skenbara rörelse, månens och planeternas skenbara och verkliga rörelser, jordens form och storlek, tids- och ortsbestämningar, himlakropparnas fysiska förhållanden samt fixstjärnorna.

Detta program kan måhända av den i förhållandena mindre initierade förmodas omfatta föga mer än astronomikursen i svenska realskolor och gymnasier. Redan en flyktig granskning visar, att bokens innehåll och framställningssätt ligger på ett annat och högre plan än våra svenska elementära skolböckers i astronomi. Detta är helt naturligt, då man erinrar sig, att astronomien beretts en gynnad plats i danska skolor och att astronomiska kunskaper i Danmark intaga en mer framskjuten ställning i det allmänna medvetandet än i Sverige. Såvitt jag är rätt informerad, måste varje blivande dansk läroverkslärare i naturvetenskapliga ämnen genomgå en obligatorisk kurs i astronomi vid universitetet.

Eriksen—Pedersens lärobok synes ge en klar och vederhäftig framställning av astronomiska fakta. Den bygger i väsentliga drag på Geelmuydens stora bok, sedermera omarbetad och moderniserad av Elis och Bengt Strömgren. Förff. meddela, att professor Elis Strömgren lämnat nyttiga vinkar och ägnat boken en värdefull kritik. Den har en välgörande matematisk fasthet med diverse formler som ryggrad, och den innehåller ett 50-tal övningsexempel, bl. a. följande lustiga problem: »Hur stor är skolans lokalkonstant, och hur mycket kommer en elev för sent till skolan, om han rättar sig efter ortens lokaltid?»

Boken innehåller kapitel såsom Den ptolemeiska och den kopernikanska världsbilden, Keplers lagar, Newtons gravitationslag. Den sfäriska astronomien, tids- och ortsbestämningar samt solen och månen äro utförligt behandlade. Övriga delar av den »astronomiska hembygdskunskapen», närmast planeterna (utom jorden) och kometerna ha fått en mer summarisk framställning.

Fixstjärnorna äro behandlade i ett kapitel på 24 sidor med följande underavdelningar: ljusets aberration, fixstjärnornas avstånd, rörelse, solsystemets rörelse i förhållande till fixstjärnorna, fixstjärnornas ljusstyrka, temperatur, spektraltyper, jättar och dvärgar, solen, dubbelstjärnor, variabla stjärnor. Stjärnsystem och nebulosor ha fått 8 rikt illustrerade sidor på sin lott. På dem behandlas i särskilda underavdelningar stjärnhopar, gasnebulosor, vintergatsystemet och spiralnebulosor. Måhända hade det varit önskvärt, att de båda sistnämnda avdelningarna fått en fylligare utformning. Vintergatan och spiralnebulosorna intaga ju en central plats i modern astronomi. Vintergatsystemets rotation kunde kanske ha omnämnts och likaså det anagalaktiska (extragalaktiska)

systemet av spiralnebulosor med deras enorma hastigheter, vilka givit anledning till många gissningar, bl. a. om »the expanding universe». Det är studiet av sådana ting, som lockar och sätter fantasien i rörelse och som gör, att gemene man känner sig ha kommit närmare den aktuella forskningens härdar.

Denna reservation innebär icke någon allvarlig erinran mot dispositionen. Boken synes mig vara mycket förtjänstfull, och den kan med nöje rekommenderas till självstudium åt intresserade elever, som önska en fastare och mera matematiskt förankrad framställning än den våra svenska skolböcker i astronomi bruka ge.

Harald Petersson.

Zero, *60 st. trigonometriska ekvationer.* Gumperts förlag, Göteborg 1937 (i distrib.), 34 sid., kr. 1:75.

Ovanstående arbete utkom våren 1937, och i samband därmed uppvaktades matematiklärarna vid våra läroverk med ett meddelande om bokens existens. Dock saknades däri varje antydan om vilket ändamål den egentligen avsåg att tjäna, och det icke undertecknade företalet lämnar icke heller någon upplysning härom.

I företalet läser man: »De trigonometriska ekvationerna utgöra en icke oviktig del av matematiken. Jag har här sammanfört ett antal sådana ekvationer och hoppas, att jag fått med de flesta typerna. — Materialet är hämtat ur Tidskrift för elem. matem., fysik o. kemi och ur samlingen av studentproblem samt diverse andra källor». Till vilken kategori av elever, som förf. vänder sig, får man ej veta. Givetvis kan jag då ej ingå på någon kritik av urvalet av lärostoff utan vill endast granska innehållet sådant det nu är.

Boken innehåller 60 ekv. jämte lösningar. Såsom i företalet anges, äro de flesta av dessa uppgifter hämtade ur kända källor. Till dessa har förf. publicerat lösningar. Dessa lösningar tarva en granskning.

En trigonometrisk ekv. kan ju i regel lösas på flera sätt, förf. nöjer sig med en metod för varje uppgift, utom beträffande fyra ekv., där en andra metod skisseras och vid uppg. 3, där det hugnesamma meddelandet lämnas, att »ekv. kan lösas på flera andra sätt, se Collin-Ohlons lärobok». Förf:s egen lösning till uppgiften är ej nöjaktig (se nedan). När endast en lösning lämnats till varje uppgift, skulle man vänta, att den vore den enklaste eller särskilt lärorik. I en del fall finner man emellertid raka motsatsen.

Redigeringen av lösningarna lämnar mycket övrigt att önska. Uppställningen är ofta oredig, och kommentar saknas på många

ställen, där sådan dock vore synnerligen önskvärd. »Slarvfel» uppträda i ett uppseendeväckande antal. I bortåt hälften av uppgifterna finner man dylika, ett eller flera: oriktiga tecken, förväxling av minus- och likhetstecken, tg $2x$ i st. f. $\mathrm{tg}^2 x$ o. s. v. Man måste vara ordentligt hemma på området för att kunna arbeta sig igenom lösningarna.

Men fel av vida allvarligare art förekomma, tydande på att förf. ej behärskar trigonometriens grunder. En fjärdedel av lösningarna måste jag bedöma såsom »oriktiga». Utan kommentar återges brottstycken ur några lösningar:

Uppg. 3: $\cos(x - 45°) = \frac{1}{2}$; $x - 45° = 60°$; $x = 105° + \text{n. } 360°$.

Uppg. 4: $\cos x = 0$; $x = 90° + \text{n. } 360°$.

Uppg. 5: $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0{,}5$; $\frac{x}{2} = 26°{,}56$; $x = 53°{,}12 + \text{n. } 180°$.

Uppg. 16: $\sin 15x = 0$; $15x = 0° + \text{n. } 360°$; $x = \text{n. } 24°$.

Uppg. 22: $\sin 2x = 0{,}618$; $2x = 19°{,}04$; $x_1 = 9°{,}52 + \text{n. } 360°$; $x_2 = 180° - x + \text{n. } 360°$.

I företalet lämnas det riktiga rådet, att om möjligt undvika att vid lösning kvadrera en trigonometrisk ekv., detta för att undvika en tidsödande prövning av de erhållna rötterna. I den enda uppgift (nr. 22) där förf. anser sig tvungen tillgripa kvadrering, misslyckas han fullständigt. Efter förenkling erhålles här ekv.: $\sin x - \cos x = \sin 2x$ (x en spetsig vinkel). Det anföres, att »då x är en spetsig vinkel, finns intet skäl att undvika kvadrering». Alldeles riktigt, bara man tillser, att vänstra ledet blir positivt. Detta har dock förf. förbisett, när han anger resultatet $x = 9°{,}52$. Det riktiga värdet har han icke fått fram, därför att han icke behärskat lösningen av den enkla ekv. $\sin 2x = 0{,}618$ (se ovan).

I uppg. 43 meddelas, att $\sin x = \sin(180° - x)$. Upptäckten förefaller vara något senkommen, alldenstund det borde ha funnits anledning att begrunda denna elementära likhet i ett tjugutal av de föregående uppg. En del av dessa ha blivit oriktigt lösta just på grund av att denna sinusfunktionens egenskap negligerats. Anmärkas bör, att slutresultaten — av allt att döma hämtade ur någon exempelsamling — i en del fall äro riktiga, trots att de givna lösningarna icke motiverat desamma.

Boken vimlar av felaktigheter. De som här anförts, borde vara tillräckliga för att visa dess ovederhäftighet. Den något språkkunnige finner osökt förf:s pseudonym lämplig även som rubrik över innehållet.

Man må hoppas, att boken ej hunnit få nämnvärd spridning. Lärare böra varna sina elever för den. Det aktade förlaget har

begått ett fatalt misstag, då det åtagit sig distributionen av detta undermåliga tryckalster av en anonym författare. Är det ej sed att en distributör undersöker halten av vad han åtager sig att distribuera, då författaren ej med sitt namn vill svara för innehållet? Förlaget skulle göra den svenska undervisningen en tjänst genom att omedelbart draga in upplagan.

N. Sundberg.

Gradualavhandlingar.[1]

Edvard Brunius, *Chemical Studies on the true Forssman Hapten, the corresponding Antibody, and their Interaction.* Stockholm 1936, 286 sid. Disp. vid Stockholms Högskola $^{14}/_{12}$ 1936. Opponenter: professor K. Myrbäck och professor J. Runnström.

År 1911 upptäckte prof. J. Forssman i Lund, att injektion av extrakt från marsvinsorgan på kaniner ledde till bildandet av hämolytiska antikroppar gentemot fårblod. Mellan marsvinsorgan och fårblod måste det sålunda föreligga en immunologisk släktskap, ett resultat, som var uppseendeväckande, enär biologerna vid denna tidpunkt allmänt förfäktade den åsikten, att artspecifiteten var absolut. Den för marsvinsorgan och fårblod gemensamma immunologiska principen har blivit kallad det heterogenetiska antigenet eller Forssmanantigenet (F-antigenet). Senare forskningar ha visat, att det finns en hel grupp av Forssmanantigen, vars medlemmar äro vidsträckt spridda inom djurvärlden och bland mikroorganismer. Det *äkta* F-antigenet besitter egenskapen att reagera med alla antikroppar svarande mot medlemmar av Forssmangruppen.

Den första huvudavdelningen av föreliggande studie behandlar i första hand isoleringsförsök å den specifika delen av det äkta F-antigenet, haptenet. Efter omfattande reningsförsök kunde förf. uppnå en höggradig anrikning av detta hapten. Det renaste preparatet var omkring 30 000 gånger så aktivt som utgångsmaterialet — färsk hästnjure — och kunde ännu vid utspädningen 1/50 000 000 serologiskt påvisas. De högrenade substanserna visade vid elementaranalys följande sammansättning: c:a 60 % C, 10 % H, 2,2 % N och spår av P och S. Efter hydrolys reducerade preparaten Fehlings lösning, och kvantitativa bestämningar ådagalade en halt av c:a 30 % reducerande substanser, sannolikt till största delen bestående av kolhydrat, närmare bestämt aldohexos. Uronsyror, som utgöra en karakteristisk beståndsdel hos många immunologiskt viktiga substanser, kunde ej påvisas i F-haptenpreparaten. De

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

visade sig däremot innehålla aminohexos i betydande mängd. Förekomsten av aminosocker har speciellt intresse, enär tidigare forskare kunnat påvisa substanser av denna typ i ett flertal hapten, som äro närbesläktade med det äkta F-haptenet. Förf. påpekar den möjligheten, att aminosocker kan vara en karakteristisk beståndsdel inom hela gruppen av F-hapten. Slutligen befunnos preparaten innehålla en komponent, som sannolikt är av fettsyrenatur.

Å de högrenade preparaten utfördes en del försök med gruppspecifika reagens. Haptenet var resistent gentemot HNO_2 och fenylisocyanat och även mot proteolytiska enzymer (papain, trypsin). Vid inverkan av diazometan gick däremot den immunologiska aktiviteten förlorad. Detta resultat tyder på förefintligheten av sura grupper (karboxylgrupper), som äro nödvändiga för haptenfunktionen.

Den andra huvudavdelningen av avhandlingen behandlar den mot det äkta F-haptenet svarande antikroppen. Undersökningarna avse att få en uppfattning om den kemiska naturen hos denna. Ingående reningsförsök utfördes, varvid huvudsakligen specifika adsorptionsmetoder kommo till användning. Det mest aktiva preparatet var, räknat å total-N, 1000 gånger renare än utgångsserum. Den första frågan gällde, om den högrenade antikroppen är av äggvitenatur eller ej. Det visade sig, att proteolytiska enzymer åstadkommo en kraftig nedbrytning av antikroppen, ett resultat, som tyder på äggvitenatur hos den aktiva beståndsdelen. Ett ytterligare stöd för denna uppfattning lämnades av stabilitetsundersökningar utförda vid varierad temperatur och aciditet. Det fortsatta studiet gav starka hållpunkter för den åsikten, att antikroppen är av globulinnatur. Slutligen utfördes en del preliminära försök i avsikt att utröna, vilka karakteristiska grupper som äro nödvändiga för antikroppsverkan. Såväl HNO_2 som fenylisocyanat befunnos åstadkomma en praktiskt taget fullständig inaktivering av antikroppen. Dessa resultat stödja den uppfattningen, att antikroppens immunologiska aktivitet står i nära relation till förefintligheten av fria aminogrupper inom molekylen.

I den tredje huvudavdelningen uppehåller sig förf. vid den specifika reaktionen, som äger rum mellan F-haptenet och den homologa antikroppen. Den av amerikanen Coulter företrädda uppfattningen, att endast den isoelektriska formen av antikroppen har förmåga att reagera med haptenet, underkastades en närmare analys. Förf. påvisar, att Coulters experiment äro behäftade med metodiska fel och att teorien med största sannolikhet är felaktig. I en detaljerad undersökning studerar förf. därefter inverkan av neutralsalter å hapten-antikroppsreaktionen. I frånvaro av elektro-

lyter uteblev reaktionen, i närvaro av salter ägde däremot en stark bindning rum. Det visade sig, att katjonerna äro verksamma därvid och vidare att katjonernas valens är av utslagsgivande betydelse för elektrolyternas effektivitet. Till sist diskuteras naturen av hapten-antikroppsreaktionen med utgångspunkt från tidigare i avhandlingen vunna erfarenheter beträffande haptenets och antikroppens kemiska byggnad.

ARVID HOLMQVIST, *Undersökningar av antimons och vismuts elektromotoriska förhållanden i vattenlösningar.* Lund 1936, 104 sid. Disp. vid Lunds Universitet d. 12 dec. 1936. Opponenter: docent O. STELLING och fil. lic. B. ADELL.

Särskilt beträffande antimon ha en mängd författare undersökt den potential, som elektroden antager i olika lösningar. De ha därvid ej erhållit överensstämmande resultat.

I föreliggande avhandling har utförts ett stort antal potentialmätningar med den vanliga kompensationsmetoden mot olika referenselektroder. Det kunde visas, att såväl antimon- som vismutelektrodernas potential påverkades av luftsyre i lösningarna. Härigenom förklarades den bristande överensstämmelsen mellan olika forskares resultat. Syrgasens inverkan på potentialen syntes sammanhänga med bildningen av vätesuperoxid.

För att erhålla fullt konstanta potentialvärden, som ej påverkades av luftens syre, användes elektroder bestående av antimon- resp. vismutpulver, och lösningarna befriades från luftsyre genom utbubbling med kvävgas. Mätningarna utfördes i olika lösningar, som antingen innehöllo salt av samma metall som elektroden eller voro mättade med den antimon- resp. vismutförening, som var fast beständig fas i ifrågavarande lösning. I samtliga fall varierade metallpotentialen med de beräknade ändringarna i jonaktiviteten så, som Nernsts formel fordrar.

Vismutperklorat bildar inga svårlösliga hydrolysprodukter vid utspädning, varför lösningar av detta salt kunde framställas utan extra syra. Hydrolysen bestämdes därigenom att vätejonkoncentrationen mättes med kinhydronelektrod. Av värdena framgick, att hydrolysen ungefär motsvarade fullständig omsättning enligt schemat:

$$Bi^{+++} + 2H_2O \rightleftarrows Bi(OH)_2^{+} + 2H^{+}.$$

Under antagande att de bildade hydrolysprodukterna voro $Bi_2(OH)_4(ClO_4)_2$ och $Bi_2(OH)_5ClO_4$ (i lösning avdissocieras ClO_4-joner) uppställdes en formel, varmed hydrolysen kunde beräknas.

Med hjälp av denna formel kunde man även beräkna den absoluta vismutjonkoncentrationen.

Genom mätning av elektromotoriska kraften för elementet

$$Sb/Sb_2O_{3\,fast},\ lösning/lösning,\ H_2/Pt$$

vid olika temperaturer kunde värmetoningen för reaktionen

$$Sb_2O_{3\,fast} + 3H_2 = 2Sb + 3H_2O$$

beräknas. Härvid erhölls värdet $37{,}8 \pm 1{,}6$ kgkal vid 18° C. Denna värmetoning kombinerades med vattnets bildningsvärme varigenom erhölls bildningsvärmet för reguljär antimontrioxid $= 167{,}1 \pm \pm 1{,}6$ kgkal, vilket värde överensstämmer ganska väl med dem, som finnas i litteraturen, vilka erhållits på enbart kalorimetrisk väg. På motsvarande sätt bestämdes vismuttrioxidens bildningsvärme ur värmetoningarna för de strömalstrande reaktionerna i elementen:

$$Bi/Bi(ClO_4)_3,\ 0{,}5\ n\ HClO_4/0{,}5\ n\ HClO_4,\ H_2/Pt$$

och

$$Bi/NaOH,\ Bi_2O_{3\,fast}/NaOH,\ H_2/Pt.$$

Som resultat erhölls av första elementet 139,2 kgkal och av det andra $136{,}0 \pm 1{,}6$ kgkal vid 18° C räknat per mol Bi_2O_3. Dessa värden överensstämma med de kalorimetriska bestämningar, som finnas i litteraturen.

Tage Heimer, *Die Bandenspektren der Hydride und Deutride des Kupfers und Goldes.* Gleerupska Univ.-bokh., Lund 1937. 86 sid. Disp. vid Stockholms Högskola den 10 april 1937. Opponenter: docent Gösta Stenvinkel, fil. lic. Ernst Olsson.

De starkaste banden av kopparhydridens spektrum ha länge varit kända, men experimentella svårigheter ha förhindrat de forskare, som arbetat med detta spektrum, att nå närmare kännedom om detsamma. Vid försök, utförda på vismuthydridens bandspektrum, varvid en elektrisk ljusbåge mellan koppar- och vismutelektroder användes, funno Alf Heimer och förf. att kopparhydridens spektrum kunde erhållas med stor intensitet med tillhjälp av en legering koppar-vismut. Förut har Ernst Knave funnit en liknande effekt på silverhydridens bandspektrum vid användning av en silver-aluminium legering. Den funna effekten gav anledning till ett närmare studium av den elektriska ljusbågen för att finna den urladdningsform, som var mest gynnsam för alstringen av bandspektra. Det visade sig, att man bör eftersträva den form, där aktiveringen så mycket som möjligt närmar sig den rent

termiska. Denna aktiveringsform kan bäst erhållas genom att kombinera ljusbågen med en ugn; ugnen för att överföra tillräcklig mängd av metallen i gasform och ljusbågen för att erhålla den höga temperatur, som man ej kan ernå med en ugn enbart.

Med tillhjälp av en anordning grundad på denna princip kunde kopparhydridens bandspektrum fotograferas med stor intensitet i ett 6,5 m konkavgitter med en dispersion av 1,95 Å/mm. Genom analys av detta spektrum har kännedomen av det förut bekanta violetta bandsystemet betydligt utvidgats och dessutom fyra nya bandsystem upptäckts. Den uppspaltning av kopparhydridens bandlinjer, som förorsakas av att kopparatomen har två isotoper med atomvikterna 63 och 65, har uppmätts och befunnits vara i överensstämmelse med den teoretiskt beräknade.

I bandspektra förekommer ofta, att linjer icke återfinnas på de ställen, där de enligt de teoretiska formlerna kunna väntas ligga. Som vågmekaniska beräkningar ge vid handen, ligger orsaken till dessa s. k. störningar däri, att de olika tillstånden under vissa betingelser, givna av Kronig, utöva inflytande på varandra. Genom systematisk undersökning av kopparhydridens bandspektrum ha samtliga däri funna störningar kunnat förklaras och även kännedom om de obekanta störande molekyltillstånden vunnits, såsom energiläge o. d. I tre fall har även själva störningsförloppet kvantitativt kunnat behandlas och riktigheten av Kronigs störningsteori visas. Bland de behandlade störningarna finns ett sällsynt vackert fall, förmodligen det vackraste som hittills funnits (störning 3 sid. 49; störningsförloppet avbildat i figg. 6 o. 7 sid. 52).

Koppardeutridens bandspektrum, som förut ej upptagits, har även fotograferats och undersökts. Massförhållandet mellan de två isotopmolekylerna $Cu^{63}H$ och $Cu^{63}D$ har beräknats ur bandkonstanterna. De erhållna värdena avvika något från det ur atomvikterna beräknade värdet. De funna avvikelserna ha visats vara i överensstämmelse med vad man, enligt av Van Vleck nyligen gjorda teoretiska beräkningar, kan vänta.

Guldhydridens bandspektrum har liksom kopparhydridens alltid bjudit svåra experimentella hinder. Dessutom ha de undersökningar, som gjorts, blivit mycket dyrbara på grund av det höga guldvärdet. Utgående från den ovan nämnda principen med en kombination av ugn och ljusbåge har en anordning utarbetats, varigenom dels ett intensivt spektrum erhålles och dels guldförbrukningen nedbringas till ett minimum. Härigenom möjliggjordes fotografering av detta spektrum med hjälp av institutets stora konkavgitter, varigenom analysen kunnat utföras med samma noggrannhet som vid ovan nämnda bandspektra.

Gulddeutriden, som förut ej upptagits, har även undersökts, och massförhållandet mellan de båda isotopmolekylerna AuH och AuD har beräknats.

ANNA BECKMAN, *Bidrag till kännedomen om Skandiums spektrum i yttersta ultraviolett.* 95 sid. Disp. i Uppsala 25 maj 1937. Opponenter: docent BENGT EDLÉN och fil. lic. FOLKE TYRÉN.

Föreliggande avhandling utgör ett led i de undersökningar, som sedan flera år tillbaka utföras på Uppsala Universitets fysiska institution över spektra i yttersta ultraviolett. Genom de på institutionen utarbetade metoderna har det blivit möjligt att erhålla goda spektrogram långt ut mot korta våglängder, och kännedomen om detta svårtillgängliga spektralområde har sålunda starkt utvidgats. Vid fotograferingen av spektra användes konkavgitter, uppställda för strykande incidens, d. v. s. med infallsvinkeln nära 90°. Hög jonisering ernås genom användande av kondenserade gnisturladdningar i vacuum.

Över skandiumspektrum i ultraviolett ha tidigare endast ett fåtal arbeten utförts. En av orsakerna till att detta spektrum blivit mindre väl utforskat än spektra från angränsande element i det periodiska systemet har varit detta grundämnes sällsynthet och svårigheten att anskaffa material. För den nu föreliggande undersökningen har använts skandiumoxid från Adam Hilger, London; oxiden härstammar från Crookes' samlingar. Tre olika slag av elektroder användes. Dels pressades skandiumoxid tillsamman med magnesiumpulver till stavar; dels begagnades beryllium- eller grafitelektroder, där skandiumoxiden fasthölls genom smält bortrioxid. Våglängdsbestämningar utfördes mellan 60 ÅE och c:a 1600 ÅE. Avhandlingens första del innehåller en tabell över skandiumlinjer i detta spektralområde samt en serie tillhörande spektrogram.

I avhandlingens senare del lämnas en redogörelse för de försök som gjorts att klassificera de uppmätta spektrallinjerna. I vacuumgnistan erhållas spektra från olika högt joniserade atomer; det har i föreliggande fall varit möjligt att identifiera linjer, tillhörande skandiumjoner, där ända till 10 elektroner bortryckts från atomen (Sc XI). Dessa joner innehålla alltså liksom natriumatomen 11 elektroner och ge ett spektrum, som till sin byggnad liknar alkalimetallernas bågspektra. Här ha flera spektralserier kunnat identifieras; joniseringsspänningen har beräknats. Även i det spektrum, som utsändes av den niofalt joniserade skandiumatomen (Sc X), ha flera spektralserier beräknats. I spektra från skandiumatomen i

joniseringsstadierna Sc IX—Sc IV ha en del linjer kunnat klassificeras.

Spektrum från den kaliumliknande skandiumjonen, Sc III, har redan tidigare analyserats; några av dessa långt ut i ultraviolett belägna linjer ha återfunnits. Spektra från lägre joniseringsstadier omfatta i huvudsak linjer av längre våglängder och falla därför utanför det undersökta spektralområdet. Högre joniseringar än Sc XI torde ha förekommit i gnistan, men deras spektra ligga så långt ut i yttersta ultraviolett, att de ej kunnat registreras med de använda spektralapparaterna.

Avhandlingar i läroverkens årsredogörelser 1936—37.[1]

Ola Olsson, *Några rön vid byggandet av luftinjektorer för akvarier.* Enskilt arbete i R III[3]. Högre allm. lärov. i Västerås (4 sid.).

C. E. Sjöstedt, *Geometriens axiomsystem.* Högre allm. lärov. i Östersund (26 sid.).

Hugo Tengnér, *Zur Berechnung der Anzahl der Lösungen einer diophantischen Gleichung.* II. Vasa realskola, Stockholm (21 sid.).

Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1936—37.[1]

Göteborg: lektor A. Björkeson, Principer vid optiska demonstrationsförsök; adjunkt J. Lundberg, Demonstrationsexperimentet i kemiundervisningen, De kemiska laborationsövningarna, särskilt på gymnasiet; lektor A. Wahlund, Om numerisk noggrannhet.

Stockholm: lektor A. Nordhult, Elektriska generatorers, motorers och transformatorers behandling i gymnasiets kurs; lektor E. Nordefeldt, Nyare litterära hjälpmedel vid kemiundervisningen, Planerandet och ledandet av skolans laborationsövningar i kemi; lektor A. Wahlgren, Empiriskt införande av logaritmer; adjunkt S. Åstrand, Om geometriundervisningen i realskolan.

Uppsala: G. Bolinder, Matematikens ställning i de svenska gymnasierna under olika tidsskeden, Matematikundervisningens allmänna metodik på gymnasiet, Logaritmer och deras införande i skolan, lektor F. Borg, Om den naturvetenskapliga undervisningens principer, med särskild hänsyn till undervisningen i biologi och kemi; lektor B. Hedenstedt, Den naturvetenskapliga undervisningens principer, Läroverkets lokaler för undervisningen i fysik å gymnasiet; adjunkt P. Granath, Läroverkets lokaler för undervisningen i fysik i realskolan; adjunkt J. Palmgren, En institutionschefs åligganden, Läroverkets kemiska institution och dess möjligheter.

[1] Uppgifterna ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska byrå.

Tidskriften som premium till elever vid skolor i Sverige och grannländerna.

Under de senaste åren har tidskriftens red. varje år från samma person fått mottaga en gåva, vilken gjort det möjligt att utsända ett friexemplar av tidskriften till en elev vid vart och ett av rikets högre läroverk (allm. och tekniska läroverk, kommunala och privata gymnasier med reallinje, folkskoleseminarier). Rektor och huvudlärarna i matematik, fysik och kemi ha i samråd utsett en elev, som genom intresserat och framgångsrikt arbete inom denna ämnesgrupp gjort sig förtjänt av en uppmuntran. De under 1937 utsedda återfinnas i nedanstående förteckning.

Meddelanden från dem, som under de gångna åren på detta sätt fått mottaga tidskriften, visa att många kunnat tillgodogöra sig tidskriftens innehåll i långt högre grad än man förmodat. Givetvis är det problemavdelningen som intresserar mest; red. har haft nöjet mottaga både problem och lösningar, vilka vittna gott om de unga författarnas intresse och kunskaper. Red. hoppas på flera dylika bidrag.

Till givaren framföres såväl mottagarnas som redaktionens tack.

Såsom ett bidrag till nordiskt samarbete har red. i år erbjudit Föreningen Norden 30 ex. av tidskriften att lika fördelas mellan Danmark, Finland och Norge. Nämnda förening har välvilligt ombesörjt fördelningen av dessa efter samma grunder, som gälla för de svenka premieex. Red. efterlyser en donater, villig att bidraga till kostnaderna för dessa premieex. till grannländerna, så att utsändningen kan fortsättas under kommande år.

Red.

Högre allmänna läroverk: Olle Nelander, Borås; Lennart Bergefors, Eksjö; Stig Jonsson, Eskilstuna; Ulf af Trolle, Falun; Ebbe v. Hofsten, Gävle; Allan Elliot, Göteborgs latinl.; Jan Hansson, Göteborgs reall.; Britta Ellegård, Göteborgs flickl.; Lars Olof Lekander, Halmstad; Erland Heiskala, Haparanda; Lars Nilsson, Hudiksvall; Lisbet Dencker, Hälsingborgs flickl.; Gösta Leijon, Härnösand; Sten Bergman, Jönköping; Åke Nilsson, Kalmar; Stig Elman, Karlskrona; Bengt Sundquist, Karlstad; Åke Rosengren, Kristianstad; Valdemar Olsson, Kristinehamn; Knut Hellberg, Landskrona; Sven Nylander, Lidingö; Sture Persson, Linköping; Herman Ljungfelt, Luleå; Bertil Nilsson, Lund; Lennart Mattsson, Malmö gossl.; Ella Kockum, Malmö

(Forts. på sid. 223 o. 224).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

922) *Till kurvan* $ax^2 + 2bxy + ay^2 = 1$ *drages en tangent. Bestäm tangeringspunkten så, att tangentens avstånd från origo blir maximum eller minimum;* $a^2 - b^2 \neq 0$ *och* $b \neq 0$.

Stig Comét.

923) *Angiv heltalslösningar (för* x, y *och* z*) till ekvationen* $x^2 + y^2 = A \cdot z^2$, *där* A *är ett tal, som kan skrivas som en summa av två hela tals kvadrater.*

Stig Comét.

924) *Volymen av en sfärisk sektor kan anses vara sammansatt av en rät kon och ett sfäriskt segment. För vilken toppvinkel är förhållandet mellan delarnas volymer lika med förhållandet mellan deras buktiga ytor?*

S. L.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

925) Lös ekv. $5x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 8x + 4 = 0$.

Svar: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{5}$. Ledning: Ordna efter stigande dignitet och komplettera, så att leden bli jämna kvadrater.

926) Två cirklar med radierna 13 cm och 1 cm tangera varandra, innantill. En korda i den större cirkeln tangerar den mindre och bildar 30° med centrallinjen. Hur lång är kordan?

Svar: 24 cm eller $4\sqrt{30}$ cm.

927) Bestäm förhållandet $x : y : z$ ur ekv. syst.

Svar: $x : y : z = 2 : 3 : 4$. $\frac{x+z}{y} = \frac{z}{x} = \frac{x}{z-y}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 925, 927, 934, 936, 937 äro insända av *X*; 926, 935, 939 av *S. B.*; 928—929 av *P.*; 930, 938 av *C. E. Fröberg*; 931—933 av *S. L.*

928) Lös ekv. $2\sin x - \operatorname{tg} x = 2\sin 2x + \operatorname{tg} 2x$.

Svar: $\pm 60 + \text{n.}\,360°; \pm 129°{,}04 + \text{n.}\,360°; \text{n.}\,180°$.

929) I en rektangel med sidorna a och b förlänges den ena diagonalen över båda sina ändpunkter med ett stycke $= x$, som är mindre än rektangelns halva diagonal. På den andra diagonalen avsättas de punkter inom rektangeln, som ligga på avståndet x från denna diagonals ändpunkter. De så erhållna fyra punkterna tagas till hörn i en parallellogram. Skillanden mellan rektangelns och parallellogrammens ytor kan skrivas $= k \cdot x^2$, där k är en konstant. Bestäm k.

Svar: $k = \dfrac{4ab}{a^2+b^2}$.

930) Summan av ytorna av en kub och en liksidig kon är konstant. När är summan av deras volymer minimum?

Svar: Förhållandet mellan kubens kant och konens basradie bör vara $2 : \sqrt{3}$.

931) Om i en sfärisk sektor inskrives ett klot, i mellanrummet mellan detta och spetsen ett andra klot, mellan detta och spetsen ett tredje o. s. v., bli klotens sammanlagda ytor lika med sektorns koniska yta. Bevisa detta.

932) Toppen på en rät cirkulär kon avskäres med ett plan parallellt med basytan. Angiv sannolikheten för att toppkonens totala yta är mindre än den stympade konens, om vinkeln mellan generatrisen och bottenytan är α.

Svar: $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

933) En pyramid delas av ett plan parallellt med basytan i två delar. a) Bestäm sannolikheten för att ingen av delarna är mindre än en given bråkdel α $(0 < \alpha < 1)$ av den andra. b) Bestäm motsvarande sannolikhet vid liknande delning av ett prisma, om $\alpha = \dfrac{1}{8}$.

Svar: a) $\dfrac{1-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$; b) $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} - \dfrac{7}{9}$.

934) Av tolv stänger, alla med längden a, har man hopfogat kantlinjesystemet i en regelbunden oktaeder, som försetts med ledgångar i hörnen. Man utbyter en av stängerna mot en annan med

längden x. Bestäm volymen av den deformerade oktaedern och angiv för vilket x-värde volymen är störst.

Svar: $\frac{a}{6}\sqrt{(a+x)^3(2a-x)}$; $x=\frac{5a}{4}$.

935) Bestäm ekv. för den gemensamma tangenten till kurvorna $y=x^3$ och $y=(x-1)^3$.

Svar: $54x-32y=27$ och $y=0$.

936) Genom punkten $(m;\ n)$ drages en linje med x-interceptet a och vinkelkoefficienten k. Visa, att den linje, vars x-intercept är $a+1$ och vinkelkoefficient $2k$, alltid går genom en fix punkt.

Svar: Genom punkten $(m+1;\ 2n)$.

937) A $(-6;0)$, B $(0;-6)$ och en punkt P i första kvadranten utgöra hörn i en triangel, vars yta $=36$ ytenheter. Den del av triangelns yta, som faller inom första kvadranten, utgör 5,4 ytenheter. Angiv koordinaterna för P.

Svar: $(2;4)$ och $(4;2)$.

938) Vilka x-värden göra determinanten

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 2x^3 & 3x^3 \\ 3x^3+1 & 3x^3+2 & 3x^3+3 \end{vmatrix}$$

till maximum eller minimum?

Svar: $x=1$ ger maximum och $x=\frac{7}{9}$ minimum.

939) Ekv. $4x^2+axy+y^2+bx+cy-3=0$ betyder två parallella linjer, den ena gående genom $(1;1)$. Bestäm a, b och c.

Svar: $a=4$; $b=-4$; $c=-2$ eller
$a=-4$; $b=4$; $c=-2$.

Lösn. till uppg. 882—884.

882) *I en triangel, vars alla sidor äro olika, dragas höjderna, bissektriserna och medianerna. Dessa linjers skärningspunkter med motstående sidor äro* H_1, H_2, H_3, B_1, B_2, B_3, och M_1, M_2, M_3, *varvid samma index hänför sig till skärningspunkten med samma sida. Bevisa, att*

$$\frac{H_1B_1}{B_1M_1}\cdot\frac{H_2B_2}{B_2M_2}\cdot\frac{H_3B_3}{B_3M_3}=\left(\frac{2p}{R}\right)^2,$$

där $2p$ = *triangelns omkrets,* R = *den omskrivna cirkelns radie!*

Stig Comét.

Om punkterna med index 1 ligga på sidan a, och om de övriga sidorna äro b och c, har man (enligt lösningen till uppgift 848, årg. *20*, sid. 76) $H_1M_1 : B_1M_1 = (b+c)^2 : a^2$. Alltså fås, enär B_1 måste ligga mellan H_1 och M_1:

$$\frac{H_1B_1}{B_1M_1}=\frac{H_1M_1}{B_1M_1}-1=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}=\frac{2p\,.\,2(p-a)}{a^2}.$$

Produkten blir således:

$$\frac{H_1B_1}{B_1M_1}\cdot\frac{H_2B_2}{B_2M_2}\cdot\frac{H_3B_3}{B_3M_3}=\frac{64p^2\,.\,p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}=$$

$$=(2p)^2\cdot\left(\frac{4T}{abc}\right)^2=\left(\frac{2p}{R}\right)^2.\quad \text{V. S. B.}$$

B—r.

Även löst av *Bertil, Lars Krogset, Lars Linder, S. L., L. E. Torén, C.-E. Fröberg, Karl Henrik Borch.*

883) *En tung kropp, vridbar utan friktion omkring en vågrät axel, befinner sig i jämvikt. Om vikten A upphänges i en punkt på kroppen, vrider den sig vinkeln* α *till sitt nya jämviktsläge. Utbytes A mot B, erhålles i stället vridningsvinkeln* β. *Vilken belastning hör till vridningsvinkeln* $\frac{\alpha+\beta}{2}$*?* *X.*

Om l är avståndet från vikternas upphängningspunkt till axeln, m avståndet från kroppens tyngdpunkt till axeln, v vinkeln mellan linjerna l och m, p kroppens tyngd och x den sökta belastningen, har man

$$pm\sin\alpha=Al\sin(v-\alpha);\qquad pm\sin\beta=Bl\sin(v-\beta),$$

$$pm\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=xl\sin\left(v-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Dividerar man de båda första ekvationerna med A, resp. B och adderar, får man efter omformning av summan i högra ledet:

$$(1)\qquad pm\left(\frac{\sin\alpha}{A}+\frac{\sin\beta}{B}\right)=2l\sin\left(v-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Divideras den tredje ekvationen med (1), får man

$$\frac{AB\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{B\sin\alpha+A\sin\beta}=\frac{x}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{och} \quad x=\frac{AB(\sin\alpha+\sin\beta)}{B\sin\alpha+A\sin\beta}.$$

B -r.

Även löst av *Bertil*; *E—d S—mn*; *Lars Krogset*; *S. L.*; *C.-E. Fröberg*; *G Pettersson.*

884) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} x^n+ry^pz^{n-p}&=a\\ y^n+sx^{n-p}z^p&=b\\ rsz^n-x^py^{n-p}&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Ö.

Systemets ekvationer omvandlas sålunda:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x^n+ry^pz^{n-p}=a \text{ ger } r\left(\frac{y}{z}\right)^p\left(\frac{z}{x}\right)^n=\frac{a}{x^n}-1\\ &(2)\quad y^n+sx^{n-p}z^p=b \;\text{»}\; s\left(\frac{z}{x}\right)^p\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{b}{y^n}-1\\ &(3)\quad rsz^n-x^py^{n-p}=0 \;\text{»}\; \left(\frac{x}{y}\right)^p\left(\frac{y}{z}\right)^n=rs \end{aligned}\right\}.$$

Multipliceras de tre senare ekv., fås efter förenkling:

$$(4)\quad \frac{x^n}{a}+\frac{y^n}{b}=1.$$

Om de härur erhållna uttrycken $x^n=a-\frac{ay^n}{b}$ och $y^n=b-\frac{bx^n}{a}$ införas i resp. (1) och (2), får man:

$$\left(\frac{y}{z}\right)^{n-p}=\frac{br}{a}, \text{ resp. } \left(\frac{x}{z}\right)^p=\frac{as}{b},$$

alltså $x=uz$, där $u=\left(\frac{as}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$, och $y=vz$, där $v=\left(\frac{br}{a}\right)^{\frac{1}{n-p}}$.

Infört i (4) ger detta $z^n=\frac{ab}{bu^n+av^n}=w$. Lösningen blir alltså av formen

$$x=uw^{\frac{1}{n}};\quad y=vw^{\frac{1}{n}};\quad z=w^{\frac{1}{n}},\ \text{där } u=\left(\frac{as}{b}\right)^{\frac{1}{p}};\quad v=\left(\frac{br}{a}\right)^{\frac{1}{n-p}};$$

$$w=\frac{ab}{bu^n+av^n}.$$

B—r.

Även löst av *Bertil*, *E—d S—mn*, *L. E. Torén*, *S. L.*, *C.-E. Fröberg*, *Egil Sæther.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.[1]

Augusti 1937.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Lös ekvationen

$$\frac{5x}{x+2}+\frac{2(x-1)}{x+3}=\frac{7(x-2)}{x+4}.$$

2. I en cirkel äro dragna två mot varandra vinkelräta radier. En korda är dragen så, att den av de båda radierna delas i tre lika stora delar. I vilket förhållande delas radierna av kordan?
3. Två fartyg A och B styra samma kurs men med olika hastighet. Vid ett tillfälle, då avståndet mellan dem är 5,4 sjömil, synes B från A 47° vänster om kursriktningen. Huru stort är avståndet mellan dem vid ett senare tillfälle, då motsvarande vinkel endast är 32°?
4. I triangeln ABC är vinkeln $B = 21°{,}1$, $AB = 10$ cm och AC:s projektion på $BC = 10{,}5$ cm. Beräkna den omskrivna cirkelns radie.
5. $ABCD$ är en rektangel, i vilken AB är tre gånger så lång som BC. Diagonalen AC förlänges över C till en punkt E så, att triangeln ABE får samma yta som rektangeln $ABCD$. Beräkna vinklarna i triangeln ABE.
6. Upprita grafiskt funktionerna $y = 2x^2 - 6x + 1$ och $y = x + 1$ samt angiv, för vilka x-värden $2x^2 - 6x + 1 > x + 1$.
7. Två personer A och B ordna sin bostadsfråga på olika sätt. A köper en villa, B hyr en våning, för vilken han årligen betalar en viss hyra. Efter 8 års förlopp finna A och B vid jämförelse, att deras bostäder i verkligheten blivit dem lika dyra. A tar därvid hänsyn till att hans fastighet under tiden förlorat 5 000 kronor i värde samt att hans ränteutgifter och omkostnader för reparationer m. m. årligen uppgått till sammanlagt 2 000 kronor. Hur stor årlig hyra har B betalat? Såväl B:s årshyra som A:s årliga omkostnader tänkas erlagda vid årets slut och förräntade med ränta på ränta efter 4,5 %.

[1] Student- och realexamensuppgifter givna 1936 (med svar) äro tillgängliga i särtryck (»*Problemhäfte 1936*») å 60 öre. Ett liknande »*Problemhäfte 1937*» utkommer i december.

8. Ett likbent parallelltrapets (de båda icke parallella sidorna lika långa) är givet. En av de icke parallella sidorna delas i tre lika delar, och en av delningspunkterna sammanbindes med mittpunkten av den återstående av de icke parallella sidorna. Om denna sammanbindningslinje delar trapetsets yta mitt itu, hur stort är då förhållandet mellan de parallella sidorna?

Resultat: **1.** $x_1 = -1$; $x_2 = -2\frac{5}{6}$. **2.** $1 : (\sqrt{5} - 1)$. **3.** 7,45 sjömil. **4.** 15,42 cm. **5.** 15°,25; 18°,43; 146°,32. **6.** $x < 0$ och $x > 3{,}5$. **7.** 2533 kr. **8.** 1 : 2. (Ledning: Om man sammanbinder punkten på den tredelade sidan med den tudelades båda ändpunkter, erhållas fyra parvis lika stora trianglar.) Trapetset behöver ej vara likbent.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En person skall under tio år amortera ett lån genom lika stora annuiteter på 647,60 kr. Han erhåller dock tillstånd att i stället erlägga endast upplupen ränta under vart och ett av de fem första åren och sedan amortera skulden genom inbördes lika stora annuiteter under de fem senare åren. Hur stora skola dessa annuiteter vara, om räntefoten är 5 %?
2. Genom punkten (4, 0) drages en rät linje, som tillsammans med x-axeln och linjen $4x - y + 8 = 0$ bildar en triangel med ytan 12 ytenheter. Bestäm ekvationen för denna räta linje.
3. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} &= a^2 - b^2 \\ 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) &= a^2 x + b^2 y \end{aligned}\right\}.$$

Talen a^2 och b^2 antagas vara olika och intetdera $= 0$.

4. I maximi- och minimipunkterna till kurvan $y = 4x^3 - 3x$ dragas tangenterna. Vardera av dessa råka kurvan i ännu en punkt. I dessa punkter dragas likaledes tangenter. Beräkna ytan av den fyrhörning, som begränsas av dessa fyra tangenter.
5. I triangeln ABC är $AB = 6{,}2$ cm och vinkeln $BAC = 56°{,}48$. På AC (mellan A och C) tages punkten D, så att $BD = AB$, varvid $CD = 2BD$. Solvera triangeln.
6. I en aritmetisk serie med första termen 10 är summan av alla termer med udda ordningsnummer 28 och summan av de övriga termerna 21. Beräkna termantal och differens.

7. Genom en given cirkel lägges en klotyta. Till den mindre av de två kalottytor, cirkeln begränsar, hör en sfärisk sektor. Hur stor är toppvinkeln i denna sektor, då dess volym är den minsta möjliga?

8. I en pyramid är basytan en liksidig triangel, och de tre från spetsen utgående kantlinjerna äro lika långa. Det kring pyramiden omskrivna klotets radie är två tredjedelar av pyramidens höjd. Bestäm de vinklar, som baskanterna bilda med sidoytorna.

Resultat: **1.** 1 155 kr. **2.** $4x + 5y = 16$ och $4x - 7y = 16$. **3.** $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2}$; $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}$ (två rotpar med inbördes lika tecken). **4.** $3\frac{5}{9}$ ytenheter. **5.** $AC = 19{,}25$ cm, $BC = 16{,}64$ cm; $\sphericalangle B = 105°{,}42$, $\sphericalangle C = 18°{,}10$. **6.** Differensen $= -1$; termantalet 7 eller 14. **7.** 120° (Denna uppgift kräver derivering av en kvot eller av trigonometriska funktioner och hör därför rätteligen till specialkursen). **8.** 56°,31 (vinkelns tangent $= 1{,}5$).

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Ekvationerna $ax^2 + 2bx + c = 0$ och $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$ ha rötterna x_1 och x_2 resp. x_3 och x_4. Visa att, om för dessa gäller sambandet $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} = \frac{2}{x_1 - x_2}$, så är $ac_1 + a_1c = 2bb_1$.

2. En hyperbel har brännpunkterna i (5, 0) och (−5, 0) samt tangerar linjen $2x + 3y + 3 = 0$. Bestäm hyperbelns ekvation och tangeringspunktens koordinater.

3. Beräkna vinklarna i den triangel, som begränsas av asymptoterna till kurvan $y = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$ samt tangenten i dennas skärningspunkt med y-axeln.

4. En romb, vars hörn äro i ordning A, B, C, D, har A i punkten (5, 3), B på y-axeln och C på x-axeln. Bestäm orten för hörnet D.

5. I ett klot, vars radie är r, skall göras en utborrning, begränsad av mantelytan till en kon, vars axel går genom klotets medelpunkt, och vars spets når fram till klotytan. Beräkna den koniska ytans toppvinkel så, att *hela* ytan av den kvarstående delen av klotet får största möjliga värde samt angiv detta.

6. AB är en mot axeln vinkelrät korda i en parabel samt CD en annan korda, parallell med parabeltangenten i B. Visa, att kordorna AC och AD bilda lika stora vinklar med AB.

Resultat: 2. $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{7} = 1$; (− 12; 7). 3. 14°,04; 49°,40; 116°,56.

4. Parabeln $(x - 5)^2 = 6y + 16$. 5. 38°,94; $\frac{128\pi r^2}{27}$.

Uppgifter i fysik.

Obs. Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. En smal, rak, jämntjock och homogen stav ligger på ett horisontellt golv. I stavens ena ände fästes ett snöre, varmed denna ände sakta upplyftes. Därvid tillses, att snöret hela tiden bildar rät vinkel med staven. Då vinkeln mellan denna och golvet uppnår värdet 30°, börjar den mot golvet vilande änden av staven att glida. Beräkna friktionskoefficienten mellan staven och golvet.
2. En automobil, vägande 2 400 kg, kommer med hastigheten 72 km/tim in på en jämnt lutande utförsväg, som sänker sig 5 meter på 100 (d. v. s. sinus för lutningsvinkeln = 0,05). Motorn frikopplas och bromsarna tilldragas, varigenom en parallellt med vägbanan verkande bromskraft uppkommer. Huru stor är denna, om bilen stannar på en vägsträcka av 60 m? Kraften i fråga antages vara konstant under den tid bromsningen varar. Övriga rörelsemotstånd lämnas utan avseende.
3. I ett laboratorium skall temperaturen hållas konstant under ett pågående försök. Rummet är väl värmeisolerat, men vid försöket måste man hava en elektrisk lampa på 800 watt tänd, och experimentatorn själv utstrålar 20 gcal per sek. Vidare finnes i rummet en fläkt, som drives med 0,25 ampere vid 220 volt och har till uppgift att sörja för god luftcirkulation inom rummet. För att motväga den värmeutveckling, som försiggår i rummet, har man inmonterat ett kylelement, som genomströmmas av vatten, vars inloppstemperatur är 11°,2 och utloppstemperatur 12°,5. Huru mycket vatten måste per minut genomrinna elementet?
4. Ett Torricellis rör har en genomskärningsyta av 1,25 cm². Röret är placerat i vertikal ställning med den öppna ändan nedåt i ett kärl med kvicksilver och är i sin övre del lufttomt. I röret införes så mycket eter, att rummet ovanför kvicksilvret blir mättat med eterånga, medan den etermängd, som kvarblir i vätskeform, är obetydlig. Avståndet mellan rörets övre ända och den yttre kvicksilverytan blir då 850 mm. Vad väger den etermängd, som övergått i gasform? Barometerståndet är 758 mm. Vid den rådande temperaturen, 10° C, är eterångans

maximumtryck 292 mm. En viss volym av eterångan väger under dessa förhållanden 2,64 gånger så mycket som en lika stor volym luft av samma tryck och temperatur. Kvicksilvrets värmeutvidgning lämnas utan avseende.

5. För att bestämma brytningsindex hos en planparallell glasplatta begagnade man ett mikroskop, vars tub kunde förskjutas i vertikal riktning medelst en skruvanordning med mikrometeravläsning. På mikroskopets bord lades först ett plant underlag, på vilket ett litet märke *A* var anbragt, och mikroskopet inställdes, så att detta märke skarpt avtecknade sig i synfältet. På mikrometern avlästes då 0 varv 40 delstreck. Därefter anbragtes ett litet bläckmärke *B* på glasplattan, varefter denna med *B* uppåt lades på underlaget, så att *B* kom i det närmaste lodrätt ovanför *A*. Sedan man skruvat mikroskopets tub ett stycke uppåt, såg man åter en skarp bild av *A* i synfältet. På mikrometern avlästes då 3 varv 55 delstreck. Slutligen höjde man tuben ytterligare så mycket, att bilden av *B* blev skarp. På mikrometern avlästes 9 varv 70 delstreck. Beräkna glasets brytningsindex. Varje delstreck på mikrometern betyder 0,01 varv.

6. Prismat i ett spektroskop borttages, springan belyses med natriumljus, kikaren och kollimatorn ställas i rät linje. Mellan de båda sistnämnda inskjutes ett rektangulärt glaskärl, så att kikarens objektiv kommer tätt intill kärlets ena långsida och de båda långsidorna vinkelrätt träffas av det från kollimatorn kommande parallella ljusknippet. Observatören ser i kikaren en skarp bild av springan. Nu placeras en bikonvex lins i kärlet så, att dess huvudaxel sammanfaller med kikarens, och kärlet fylles med en vätska, vars brytningsindex för natriumljus är 1,520. Då måste observatören utdraga kikarens okular 2,4 mm för att åter se en skarp bild av springan, om ögat användes på samma sätt som förut. Beräkna glaslinsens brytningsindex för natriumljus, då man vet, att dess sfäriska ytor båda ha radien 12,5 cm och att kikarens objektiv har 20 cm brännvidd. Samtliga linser äro tunna, kärlets långsidor plana och tunna. Kärlets bredd är ej större än att linsen nätt och jämnt får rum.

7. Ett platinableck skall elektrolytiskt överdragas med ett mycket tunt kopparskikt. Badet innehåller ett salt av tvåvärd koppar, och utfällningen skall försiggå vid en strömtäthet av 1,2 milliampere per cm^2. Man vill avbryta elektrolysen, då kopparskiktet kan beräknas vara 0,00005 mm tjockt. Hur lång tid bör strömmen hållas sluten? Man vet, att koppars spec. vikt är

8,94 och dess atomvikt 63,57 samt att 96 494 coulomb erfordras för utfällning av en gramekvivalent av ett ämne.

8. Om utslaget på en vridspolgalvanometers skala, n skaldelar, är proportionellt mot strömstyrkan I, alltså $n = k \cdot I$, brukar man som mått på galvanometerns känslighet taga proportionalitetskonstanten k. Denna bestämdes hos en galvanometer G på följande sätt. Två punkter A och C förenades med tre parallellkopplade ledningar. Den första innehöll i serie ett ackumulatorbatteri och ett strömregleringsmotstånd R, den andra i serie ett normalelement med elektromotoriska kraften 1,018 volt och en galvanometer G_1 samt den tredje en proppreostat med två seriekopplade motstånd, AB på 1 ohm och BC på 50 ohm. Dessutom förenades punkterna A och B ytterligare med en grenledning, innehållande i serie en reostat på 950 ohm och galvanometern G, som skulle undersökas; dennas inre motstånd var 50 ohm. Motståndet R inställdes så, att galvanometern G_1 blev strömlös, varvid utslaget hos G uppgick till 124,6 skaldelar. Beräkna känsligheten k hos galvanometern G, uttryckt i skaldelar per mikroampere. 1 mikroampere $= 10^{-6}$ ampere.

Resultat: **1.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **2.** 935,4 kgf. **3.** 10,4 kg. **4.** 60,7 mg. **5.** 1,512 $\left(=\frac{62}{41}\right)$. **6.** Linsens brytningsindex understiger vätskans med $\frac{12{,}5}{2} \cdot \frac{0{,}24}{20 \,.\, 20{,}24} = \frac{12{,}5}{2} \cdot \frac{0{,}24}{400} = 0{,}0038$; dess index alltså $= 1.516$. **7.** 113 sek. **8.** 6,25 skaldelar per mikroampere.

(Forts. från sid. 212.)

flickl.; Lars Gunnar Larsson, Norrköping; Hans Fischer, Nyköping; Nils Hunnefelt, Skara; Georg Fredzell, Skövde; i Stockholm: Birger Drake, Norra latinl.; Erik Waldén, hal å Södermalm; Bengt Andersson, Nya elem.; Lars Mélander, Norra reall.; Lars Linder, hal a Östermalm; Karl-Olov Ericsson, hal å Kungsholmen; Kerstin Borelius, flickl.; Torsten Berglund, hal å Bromma; Harry Malmgren, Strängnäs; Sven Bergström, Sundsvall; Lennart Carlsson, Södertälje; Karl-Johan Andersson, Uddevalla; Per Lennart Adner, Umeå; Lennart Sjögren, Uppsala; Daniel Glansholm, Visby; Ulf Danielsson, Vänersborg; Bengt Liljeholm, Västervik; Lars Henning, Västerås; Sven Fagerberg, Växjö; Börje Emilson, Ystad; Stig Claesson, Örebro gossl.; Brita Bergström, Örebro flickl.; Tor Erik Sundström och Åke Nilsson, Östersund.[1]

1 Det ena ex. bekostat av lärare vid läroverket.

Kommunala och privata läroverk: Gösta Nilsson, Djursholm; Gunnar Andersson, Eslöv; Agnes Pettersson, Göteborgs högre samskola; Yngve Östborn, Hässleholm; Ivar Körner, Lunds priv. elem. skol.; Bengt Palmer, Lundsbergs skola; Anna-Brita Arvidsson, Motala; Curt Borgenstam, Saltsjöbaden; Karl Gustav Malmfors, Sigtunaskolan; Karl Borg, Solbacka lärov.; i Stockholm: Carl Teofron Säve, Beskowska skol.; Gunnar Larsson, Palmgrenska samsk.; Olle Ljungström, Whitlockska samsk.; Gerd Hellström, Åhlinska skol.; Nils Backmark, Söderhamn; Ingrid Lingmark, Uppsala enskilda lärov.

Tekniska läroverk: Harry Grill, Borås; John Hammarström, Härnösand; Yngve Östborn, Hässleholm; Carl Uno Nilsson, Malmö; Folke Bäckman, Norrköping; Oskar Johansson, Örebro.

Högre lärarinneseminariet: Torgerd Martin.

Folkskoleseminarier: Britta Daniels, Falun; Harry Oscarson, Göteborg; Gösta Lundin, Karlstad; Nils Andree, Linköping; Yngve Lindblom, Luleå; Erik Cederholm, Lund; Ragnborg Olander, Stockholm; Rut Eriksson, Umeå; Evert Englund, Uppsala; Erik Johansson, Växjö.

Danmark: Ove Rasmussen, Aarhus Katedralskole; Børge Ingeman Knudsen, Aalborg Katedralskole; Viggo Kjærgaard Jensen, Haderslev Katedralskole; Gunnar Idorn, Fredriksborg Statsskole, Hillerød; Jens Ivar Pedersen, Viborg Katedralskole. I København: Poul Neerup, Christianshavns Gymnasium; Børge Nielsen, Metropolitanskolen; Asger Kjerbye Nielsen, Ordrup Gymnasium; Poul Børge Johansen, Sct. Jørgens Gymnasium; Carl G. Ståhl, Vestre Borgerdydskole.

Finland: Håkan Lönnqvist, Borgå lyceum; Pehr Sundblom, Hangö samlyceum; Bertil Qvist, Vasa svenska lyceum; Jan-Erik Jansson, Svenska lyceum i Åbo. I Helsingfors: Nils Gustafsson, Svenska normallyceum; Urmar Runolinna, Finska normallyceum; Carl-Gustav Backström, Svenska lyceum; Mac Blåfield, Nya svenska läroverket; Elisabeth Elfvengren, Nya svenska samskolan; Verner Langhoff, Läroverket för gossar och flickor.

Norge: Berit Holm Andersen, Per Christian Bay, Karl Henrich Borch, Kristian Fougner, Fridthjof Hougen, Kjell Rynning, Ernst Selmer, Egil Sæther, Gunnar Sørbye, Harald Vestad.

Teorien för de i handeln f. n. tillgängliga, moderna glasögonen.

Av **M. SUNDQVIST.**[1]

Ett glasögas första och tillika enklaste uppgift är att förskaffa ögat de nödiga skarpa slutbilderna, då ögat ser rakt fram genom glasets centrum och utefter dess axel.

Ett t. ex. närsynt — myopt — öga må utan glas och utan ackommodation bryta strålar från punkten R (fig. 1) just till fovea centralis i retina (F). Vi kalla då R ögats fjärrpunkt. Må denna ligga $\frac{1}{3}$ m framför ögat eller — närmare och bättre bestämt — $\frac{1}{3}$ m framför det plan, där glaset skall stå. I detta plan placeras glaset så, att dess optiska axel sammanfaller med ögats. Är glasets styrka minus 3 dptr, så är dess brännvidd utefter axeln $\frac{1}{3}$ m, och då brytas infallande parallella strålar, d. v. s. sådana som komma från ett mycket långt avlägset föremål, genom glaset, som om de komme just från ögats fjärrpunkt. Den av det negativa glaset alstrade virtuella bildpunkten blir nu i sin tur objektpunkt för ögat, och emedan den ligger i ögats fjärrpunkt,

[1] Den nyligen avlidne ögonläkaren d:r M. Sundqvist höll d. $^{15}/_{12}$ 1932 inför läkaresällskapet och fysiska sällskapet i Göteborg ett föredrag med ovanstående titel. Det var hans avsikt att senare bearbeta manuskriptet för tryckning, men han medhann ej detta före sin död. Föredragets innehåll torde kunna intressera ej blott ögonläkare utan även mången annan med intresse för optik, och då en orientering i den avhandlade frågan är svår att få utan att utförliga och svårtillgängliga specialarbeten måste anlitas, har en publicering av föredraget ansetts önskvärd. Författarens manuskript återges här med mycket obetydliga redaktionella ändringar och tillägg.

Uppsala i aug. 1936.

Fredrik Berg.

måste strålarna från densamma sammanbrytas till ögats fovea. Utefter glasets axel är således ögat i ackommodationslöst tillstånd korrigerat för oändligheten. Man brukar säga: ett dylikt öga är 3 dptr myopt. Exaktare är att säga: myopiens korrektionsvärde med ett glas i just detta läge är 3 dptr.

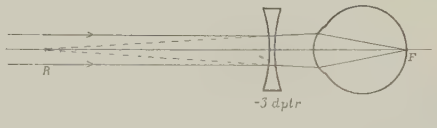


Fig. 1. Närsynt öga med korrektionsglas.

I fig. 2 ha vi ett översynt — hyperopt — öga i ackommodationslöst tillstånd. Då ligger fjärrpunkten *R* bakom ögat. Detta betyder, att infallande strålar måste ha en viss konvergens för att sedan av ögat självt utan ackommodation kunna brytas till fovean. Låt fjärrpunkten *R* ligga t. ex. $\frac{1}{3}$ m bakom det plan, där glaset skall placeras. Strålar riktade mot *R* brytas då av det ackommodationslösa ögat mot fovea. Sättes nu framför ögat ett glas om exakt + 3 dptr, så brytas infallande parallella strålar genom glaset mot ögats fjärrpunkt, och ögat blir utefter glasets axel korrigerat för oändligt avstånd med detta glas i detta läge.

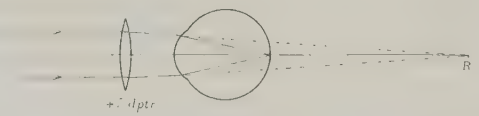


Fig. 2. Översynt öga med korrektionsglas.

Så länge nu korrektionen blott gäller denna avbildning utefter glasets axel, varvid ögats och glasets axlar sammanfalla, spelar — vid given styrka *D* — - glasets form, d. v. s. dess krökningsgrad (bikonvex, plankonvex, konkavkonvex o. s. v.), ingen roll. Men jämte korrektionen utefter sin axel har glasögat även uppgiften att ge lika goda bilder, då ögat blickar åt sidorna och därvid nödgas se snett genom det

fixa glaset. Det är då glasets krökningsgrad spelar en stor roll, och det är teorin för krökningen hos detta fixa glas framför ett åt alla håll och i stor utsträckning blickande öga, som här skall avhandlas.

Detta sammansatta optiska system — fixt glasöga såsom optiskt hjälpmedel framför ett på nämnt sätt höggradigt rörligt öga — är i själva verket ett i flera avseenden mycket egendomligt system. Vid användning av en kikare — astronomisk tub t. ex. — granskas olika delar av rymden genom tubens inställningsrörelser. Men ögat, d. v. s. ögats eget optiska system, följer därvid troget med tuben, så att ögats och tubens optiska axlar ständigt sammanfalla. Vid användning av mikroskopet är det optiska hjälpmedlet fixt, och det blir i detta fall föremålet — preparatet — som förskjutes fram och tillbaka, men även här förbli ögats och instrumentets axlar ständigt sammanfallande. Åtminstone blir det ytterst små blickvinklar, som ögat i dessa båda fall kan behöva göra, t. ex. då ögat i mikroskopet vid fixt preparatläge vill mönstra en något perifert belägen detalj i det för tillfället inneliggande *lilla* synfältet.

I vårt föreliggande fall — fixt glas + blickande öga — ha vi däremot det optiska hjälpmedlet, d. v. s. glasögat, fixt framför ett mycket rörligt öga, vars blickvinklar kunna uppgå ända till 30°. Detta är den ena egendomligheten.

Den andra stora egenheten framträder bäst, om vi jämföra glas + rörligt öga med den fotografiska kameran. Ögats upptagande, ljuskänsliga skärmyta — retina — är ju endast å ett ytterst litet område, makulans centrum eller fovea centralis, så känslig, att retinalbildens fullgoda egenskaper — om nu sådana äro förhanden — överhuvud taget kunna fullt utnyttjas. Här, men också endast här, behöver därför retinalbilden vara skarp. Beträffande de delar av denna bild, som falla utanför fovea, kan sägas, att vi ej alls kunna tillgodogöra oss deras eventuellt höggradiga skärpa.

Hela detta sista resonemang bör tydligen successivt tillämpas på de olika delarna av den bild, som glaset enbart

och direkt alstrar, ty det är denna glasbild, som i sin ordning ger upphov till retinalbilden. Olyckligtvis alltför länge hade man trott sig finna stor likhet mellan glaset + ögat och den fotografiska kameran. Men skillnaderna äro mycket stora. För det första finnes ingen motsvarande rörlighet hos den fotografiska skärmen, som ju alltid står vinkelrätt mot objektivets axel. Här dominera sålunda de avbildningsfel, som uppträda vid avbildning längs axeln, nämligen den sfäriska och kromatiska aberrationen, vilka fel visserligen existera men ej spela någon roll vid glas + öga. Vidare fordra vi av slutbilden — fotografien — att den skall

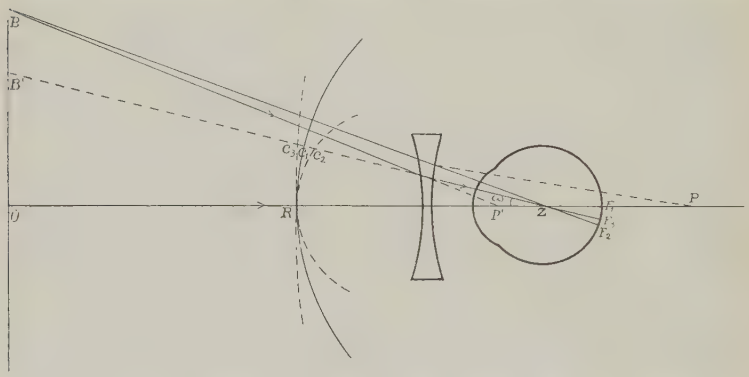


Fig. 3. Avbildning vid blick utefter glasets axel och genom en perifer del av glaset.

vara lika god i de perifera som i de centrala delarna. Denna fordran förutsätter åter, dels att den ljuskänsliga skärmen är lika känslig överallt, dels att den bild, som det fotografiska objektivet alstrar, skall vara lika god i hela sin utsträckning. Slutligen existerar den stora olikheten, att skärmytan hos kameran är plan. Därför bör också den av det fotografiska objektivet uppkastade bilden ha en plan yta. Vi skola strax se, att den bildyta, som danas av glasögat framför det blickande ögat, däremot *ej* bör vara plan utan tvärtom klotformig med en viss radie.

Vi ha i fig. 3 ett höggradigt myopt öga, vars fjärrpunkt *R* alltså ligger mycket nära ögat, kanske 5–6 cm framför

ögat. Vi önska, att denna myop utan ackommodation må kunna läsa på ett för honom bekvämare, d. v. s. längre avstånd från ögat, låt oss säga på 20 cm avstånd, räknat från det vanliga glasläget. Detta mål är i första hand uppnått, om de från objektets axelpunkt *O* utgående strålarna efter brytningen genom glaset i detta läge brytas som om de komme från ögats fjärrpunkt *R*. Personen vill nu vid läsandet med blicken följa hela raden ut i boken och skarpt iakttaga t. ex. även punkten *B* och då, såsom bekvämligheten fordrar, endast röra ögat, d. v. s. hålla huvudet med glaset stilla. Ögat måste då rotera en viss vinkel, och denna rotation sker omkring en punkt, som vi hädanefter kalla *Z* och som kan anses fix och ligga ungefär i mittpunkten av ögat.

Hade nu inte glaset stått där, så hade ögat helt enkelt roterat vinkeln *OZB* och därigenom fått sin optiska axel utan vidare inriktad mot *B*. Fovea hade förflyttats till F_2, och bilden av *B* hade fallit, visserligen ej i fovea, men dock någonstädes utefter den huvudsträcka, som går såväl genom *Z* som genom foveas mittpunkt *i det nya läget*.

Nu står emellertid ett glas där, som bryter dessa strålar t. ex. mot punkten *P*, varigenom det förhindras, att den brutna sträckan går genom *Z* och fovea. Vi få därför nu söka efter den stråle från *B*, som efter brytningen genom glaset blir riktad just mot *Z*. Det må vara strålen *BP'*. Nu har ögat endast att göra en blickrörelse, motsvarande vinkeln $OZB' = \omega$, som i detta fall — vid negativt glas nämligen — tydligen är mindre än den blickvinkel, *OZB*, som det hade måst göra utan glas. Ett tunt ljusknippe från *B*, vars huvudstråle just är *BP'*, brytes nu som om dess strålar utgått från — låt oss tillsvidare säga — en enda punkt, som är belägen någonstädes utefter förlängningen bakåt av denna brutna h-stråle, t. ex. i C_1.

Denna virtuella bildpunkt blir nu i sin tur objektpunkt för ögat, och om nu ögat har gjort just denna blickvinkel, så faller slutbilden — retinalbilden — av *B* utefter ögats

optiska axel genom Z och fovea, och under vissa betingelser, som vi strax skola komma till, faller den just i fovea. Och i så fall är allt som sig bör.

Vi stå nu vid detta sneda infall i glaset inför en helt ny och mycket mera komplicerad optisk situation, än då ögat var inriktat mot axelpunkten O, d. v. s. utefter glasets optiska axel, i vilket fall det tunna strålknippet från O inföll i glaset *icke* under sned utan under rätvinklig eller s. k. normal incidens.

Beträffande den sneda incidensen ha vi redan nu sett, att h-strålen från perifera objektpunkten B genom glasets verkan får sin riktning förändrad och att ögats inställning för B därför fordrar en annan blickvinkel — i detta fall en mindre sådan — än om glaset ej funnits där. Bäraren av glaset förlägger därför bilden av B i riktning mot B'. Med andra ord: då ögat överblickar det utsträckta föremålet från O till B, kommer punkten B ej att synas där den i verkligheten befinner sig, utan i detta fall — vid neg. glas nämligen — närmare O, varigenom det utsträckta föremålet OB synes mindre än om man överblickar detsamma utan glas. Härav vår erfarenhet, att neg. glas vid blickandet förminska ett utsträckt föremåls storlek. Hade glaset varit positivt, så hade ögats erforderliga blickvinkel i stället blivit större, och föremålet från O till B hade då synts större än utan glas. Därav de positiva glasens förstorande verkan vid ett sådant överblickande.

Vi kalla detta avbildningsfel glasets *prismatiska deviation,* emedan en perifer objektpunkt synes förskjuten åt sidan precis så som om man hade betraktat den genom ett prisma, i detta fall genom ett prisma med basen stående uppåt i fig.

Vid fortsatt bruk av våra glas lära vi lätt nog att riktigt taxera perifera punkters läge och utsträckta föremåls storlek. Och det är tur detta, ty mot detta avbildningsfel är föga eller intet att göra. Vi kunna visserligen genom en viss krökning på glaset erhålla ett minimum för detta fel, men emedan felet varierar ganska litet för förändrad krök-

ning, skulle man vinna obetydligt därmed. Vi få således härutinnan resignera. Felet växer naturligtvis under för övrigt lika omständigheter med glasets styrka och med blickvinkeln.

Betydligt viktigare än detta fel är den genom den sneda incidensen uppkomna *astigmatismen* (*As*). Detta fel betyder, såsom vi snart närmare skola se, att glaset i allmänhet ger i stället för *en* bildpunkt — såsom vi nyss för enkelhetens skull antogo — *två* dylika, de s. k. astigmatiska bildpunkterna. Både erfarenhet och teori ha visat, att det är mot detta fel, som vi framför allt böra inskrida. Vid detta fels korrektion bringa vi de båda astigmatiska bildpunkterna att sammanfalla till en, den s. k. anastigmatiska bildpunkten. Glaset blir då — såsom man med GULLSTRAND brukar säga — punktuellt avbildande, och det är just denna sorts avbildning, som är realiserad i t. ex. de Zeiss'ska s. k. punktalglasen och åtminstone till större delen i övriga firmors glas, som i handeln gå under allehanda olika namn: punktisken, perfa, optima o. s. v. För korthetens skull kallar jag hädanefter alla dessa punktuellt avbildande anastigmatiska glas för p-glas.

Jag antager nu, att den anastigmatiska avbildningen är realiserad i fig. 3 och frågar då: var bör bildpunkten lämpligast ligga? Att den ligger och bör ligga utefter den h-stråle, som efter brytningen går genom Z, ha vi redan visat, men huru långt bör den ligga från ögat?

Ja, ögat är nu roterat vinkeln ω, och bildpunkten bör givetvis ligga i det nya fjärrpunktsläge, som uppkommit för ögat genom nämnda rotation. Vi slå därför helt enkelt en cirkel genom R med Z såsom centrum. Skärningspunkten mellan denna cirkel och h-strålen blir tydligen det ideala läget för den anastigmatiska bildpunkten, ty nu ha vi $C_1Z = RZ$. Faller den här, så få vi såsom förut vid nolläget den retinala slutbilden exakt i fovea och avbildningen av B blir lika god som den av O.

Denna sista fordran beträffande anastigmatiska bild-

punktens avstånd från ögat betyder ju det, att om ögat överblickar föremålet punkt för punkt från O till B, d. v. s. blickar från noll-läget till ω-läget och därvid skall ha möjlighet att utan ändring av ackommodationen hela tiden få möjligast skarpa slutbilder av punkter, som utefter denna linje kontinuerligt följa från O till B, så måste glasets anastigmatiska bildpunkt röra sig kontinuerligt utefter cirkelbågen RC_1.

Betrakta vi hela detta plana system, bestående av objektlinje, glasögat i snittet och ögats system i noll-läge, så innebär samma fordran, att det mot noll-lägets axel vinkelräta objektplanet skall avbildas i en klotyta, som går genom R med Z till medelpunkt. Med v. Rohr kalla vi denna yta fjärrpunktsytan. Den fordran, att den anastigmatiska bildytan om möjligt bör sammanfalla med denna fjärrpunktsyta, kan ju tyckas självklar. Hur det i verkligheten har förhållit sig med denna självklarhet, är en sak, vartill jag strax återkommer.

Vi skola sedermera se, att det endast är rent tillfälligtvis, som p-glasets anastigmatiska bildyta — vi kalla den här korteligen för p-ytan — sammanfaller med fjärrpunktsytan. P-ytan blir visserligen krökt åt rätt håll, men endera för starkt eller för svagt. Huru p-ytan än är krökt, så måste den dock alltid tangera fjärrpunktsytan i R, ty om blott glaset har den riktiga och konstanta styrkan, så faller vid avbildningen utefter glasets axel bilden av O alltid i R, huru glaset än är krökt.

Om p-ytan är för starkt krökt, med den anastigmatiska bildpunkten t. ex. i C_2, ligger punkten tydligen för nära ögat, vadan ögat i detta fall måste ackommodera något litet för att få retinalbilden att falla skarpt i fovea. Tillämpa vi detta resonemang på vad som inträffar, då ögat kontinuerligt punkt för punkt granskar föremålet från O till B, så måste således ögat för att fullt tillgodogöra sig p-glasets anastigmatiska egenskaper under hela detta överblickande ackommodera, men inte nog med det, utan det måste grad-

vis stegra denna ackommodation, allt efter som det med blicken närmar sig *B*, enär ju *C* faller närmare och närmare ögat. Det måste emellertid samtidigt till försvar för p-glasen tilläggas, att räkningen visar, att även i värsta fall, således vid en blickvinkel av omkring 30°, den nödiga ackommodationen ej överstiger $\frac{1}{4}$ dptr. Vid återgång till noll-läget måste så ackommodationen på motsvarande sätt slappas. Tillgodogörandet av glasets specifika egenskaper fordrar således vid blickandet en ständig — låt vara liten — förändring av ackommodationstillståndet.

Är p-ytan återigen för svagt krökt med den anastigmatiska bildpunkten i C_3 , kommer denna något för långt från ögat. I detta fall har ögat ingen möjlighet att fullt skarpt avbilda den anastigmatiska bildpunkten. Bilden blir alltid något mindre god än för noll-läget och naturligtvis sämre, ju större blickvinkeln är. Ackommoderar ögat *nu*, så blir inställningen för denna punkt ännu sämre och likaså slutbilden. Vid positiva glas är förhållandet omvänt. Är här bildytan för svagt krökt, så kan man hjälpa sig med ackommodation; är den för starkt krökt, kan fullt skarp bild ej erhållas.

Det är redan sagt, att astigmatismen vid sned incidens är det allvarligaste felet. För bättre förståelse av detta fel måste vi emellertid först erinra något om ett annat avbildningsfel, den s. k. sfäriska aberrationen, ehuru, såsom redan är antytt, denna ej spelar någon direkt roll för glas + öga.

Från objektpunkten *O* i fig. 4 är den s. k. direktionslinjen riktad mot den brytande ytans medelpunkt *C*. Från *O* utgår nu ett ljusknippe av *ändlig* öppning, men som har till h-stråle just direktionslinjen. Detta knippe infaller således rätvinkligt. En fullt godtycklig stråle inom knippet brytes utefter banan $OP_1O'_1$, varvid normalen är P_1C, medelpunktsvinkeln φ_1, strålens höjd h_1, infallsvinkeln j och brytningsvinkeln j'.

Är brytningsindex i det andra mediet större än i det första, så brytes strålen såsom i fig. mot normalen, d. v. s.

brytningsvinkeln blir mindre än infallsvinkeln. Den brutna strålen skär direktionslinjen i O'_1. Alla strålar från O, som träffa den brytande ytan under samma elongation, d. v. s. vilka ha samma höjd h_1 eller samma medelpunktsvinkel φ_1, brytas exakt till O'_1. Nu vore idealet, att även strålgrupper av annan elongation, t. ex. h_2 eller φ_2, brötos till samma punkt. Så är det emellertid ej. Strålen OP_2, som ligger närmare direktionslinjen, brytes svagare, d. v. s. till en punkt längre bort, t. ex. till O'_2. Och ju närmare strålgruppen ligger direktionslinjen, desto längre bort ligger bildpunkten,

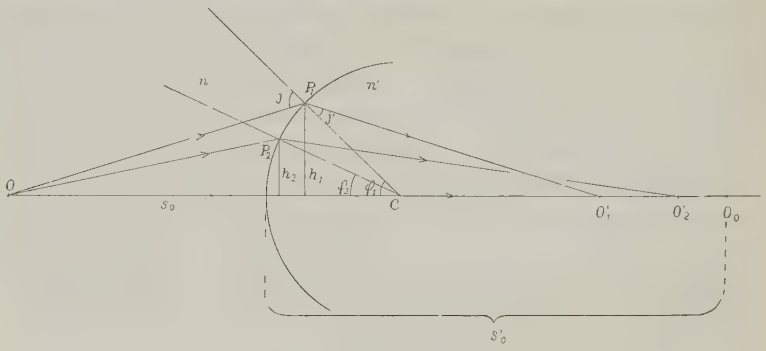


Fig. 4. Sfärisk aberration.

och i limes, d. v. s. just då elongationen övergår till noll, alstras bildpunkten i ett gränsläge, som må kallas O'_0. Den nu skildrade avvikelsen från idealet, vilken således inträffar redan i detta relativt enkla fall av rätvinklig incidens, kalla vi sfärisk aberration. Avblända vi nu detta *vidöppna* knippe genom att på en godtycklig plats utefter direktionslinjen placera en helst mycket fin blända, så bli endast de närmast axeln liggande strålarna, de s. k. paraxiala strålarna, verksamma, och vi få trots den sfäriska aberrationen en visserligen ljussvag, men mycket skarp bildpunkt i gränsläget O'_0, om vi där sätta vår bildskärm. Vi kalla avbildningen vid rätvinklig incidens medelst dessa paraxiala strålar eller noll-strålar gaussisk avbildning och bildpunkten i gränsläget O'_0 den gaussiska bildpunkten.

Objektavståndet må vara s, den variabla bildpunktens avstånd från brytande ytan må vara i allm. s'. Kalla vi dessa avstånd vid gränsläget, d. v. s. då endast noll-strålarna äro verksamma, för s_0 och s'_0, så gäller för den gaussiska avbildningen denna formel:

$$\frac{n'}{s'_0} = \frac{n}{s_0} - \frac{n' - n}{r},$$

där n' och n betyda brytningsindices i bild- resp. objektmedierna och r den brytande ytans radie. Jag vill särskilt framhålla, att bildpunktens läge blir detsamma, var bländan än sitter. Därför se vi ej heller i denna formel någon storhet som avser bländläget.

För en *tunn* lins i luft gäller vid avbildning medelst noll-strålarna formlerna:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + D \text{ och } D = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

där a är objektavståndet i meter, b bildavståndet i meter och D linsens styrka i dioptrier, n glasets index, r_1 och r_2 första och andra linsytans radier. Objekt- och bildavstånden räknas från linsen mot objekt-, resp. bildpunkt och radierna från resp. brytande yta mot medelpunkten. Alla avstånd räknas positiva i ljusets riktning.

Vi övergå nu till den sneda incidensen. I fig. 5 infaller huvudstrålen för ett oändligt tunt knippe från objektpunkten O snett mot en sfärisk brytande yta, d. v. s. den är *icke* riktad mot dess medelpunkt C. Huru snett den än infaller, kan man alltid genom de tre punkterna: objektpunkten O, medelpunkten C och infallspunkten P lägga ett plan, och detta låta vi vara teckningsplanet. Normalen är PC och infallsvinkeln j. Den brutna strålen ligger alltid i samma plan som infallsstrålen och normalen och sålunda även den i teckningsplanet. Är index n' i bildmediet större än index n i objektmediet, så brytes den infallande strålen

mot normalen, varvid brytningsvinkeln $j' < j$. Enligt den första brytningslagen är exakt:

$$n' \sin j' = n \sin j,$$

varur j' kan beräknas, då n, n' och j äro bekanta.

Strålarna i det infallande knippet kunna tänkas fördelade i en oändlig mängd plan, som dock alla gå genom h-strålen *OP*. Av alla dessa strålplan är det nu två, vilkas strålar framför de andra äro särdeles viktiga; de kallas också de båda huvudplanen. Det ena är det, som innehåller infallande och brutna h-strålen samt normalen, således här just teckningsplanet. Detta kallas tangentplanet, t-planet. Detta förblir tydligen oförändrat vid h-strålens brytning. Det andra h-planet går likaledes genom h-strålen men är alltid vinkelrätt mot tangentplanet. Det kallas sagittalplanet, s-planet, och ändrar tydligen läge vid brytningen i den sfäriska ytan.

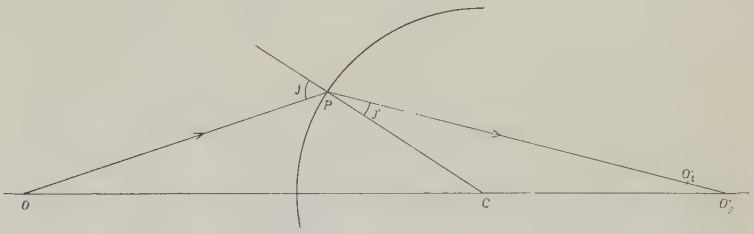


Fig. 5. Astigmatism genom sned incidens.

Av flera skäl äro dessa två plan de ojämförligt viktigaste. För det första kunna endast på dem relativt enkla matematiska lagar tillämpas. För det andra sammanbrytas endast i dessa båda plan närbelägna strålar till en punkt, vadan endast i dessa två plan förutsättningar finnas att kunna avbilda en rät linje i en något så när objektlik rät linje (kollinear avbildning).

Alla de övriga planens strålar ge överallt blott spridningskretsar med jämförelsevis liten koncentration av ljuset, vadan deras ljuseffekt under vissa betingelser minskas i jämförelse med och till förmån för de båda h-planen.

Vi skola nu se, huru brytningen försiggår i vartdera av dessa viktiga två h-plan.

Om jag utdrager OC , tills den skär den brutna h-strålen, så blir denna skärningspunkt enkelt nog den punkt dit strålarna i s-planet brytas. Vi kalla den O'_s. Strålarna i t-planet brytas i detta fall starkare än s-strålarna och låt oss säga till en punkt O'_t. Dessa två punkter utgöra nu de två astigmatiska bildpunkter, varom jag förut talat.

Kalla vi nu för t-snittet objektavståndet t och bildavståndet t', så gäller formeln

$$\frac{n' \cos^2 j'}{t'} = \frac{n \cos^2 j}{t} + \frac{n' \cos j' - n \cos j}{r},$$

ur vilken t' kan beräknas, då man känner alla de övriga storheterna.

För s-snittet gäller den något enklare formeln

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n' \cos j' - n \cos j}{r}.$$

Dessa äro sedan länge bekanta formler; den senare härledes mycket lätt trigonometriskt, den förra kräver differentialräkning. De gälla fullt exakt endast i limes, d. v. s. med oändligt tunna knippen.[1]

Är knippet före första brytningen såsom här homocentriskt, d. v. s. utgå strålarna i alla planen från en och samma punkt, så äro objektavstånden lika i de båda h-snitten, d. v. s. $t = s$.

Formlerna äro fullt generella och gälla således även för $j' = j = 0$, d. v. s. vid rätvinklig incidens och gaussisk avbildning. Vi få då $\cos j' = \cos j = 1$, och båda formlerna övergå till den formel vi förut lärt känna vid gaussisk avbildning, se sid. 11. Emedan $t = s$, blir även $t' = s'$, och vi få sammanbrytning till en enda punkt.

[1] Se t. ex. DRUDE, Lehrbuch der Optik s. 47—48.

Ha vi flera brytande ytor, t. ex. en andra sådan, så är det i andra ytan infallande ljuset icke längre homocentriskt. De förra åtskilda bildpunkterna O'_t och O'_s bli nämligen nu i sin tur objektpunkter (i var sitt h-plan) vid brytningen i denna yta, och objektavstånden i de båda h-planen bli sålunda olika. Avbildningsformlerna bli redan härigenom betydligt mera invecklade.

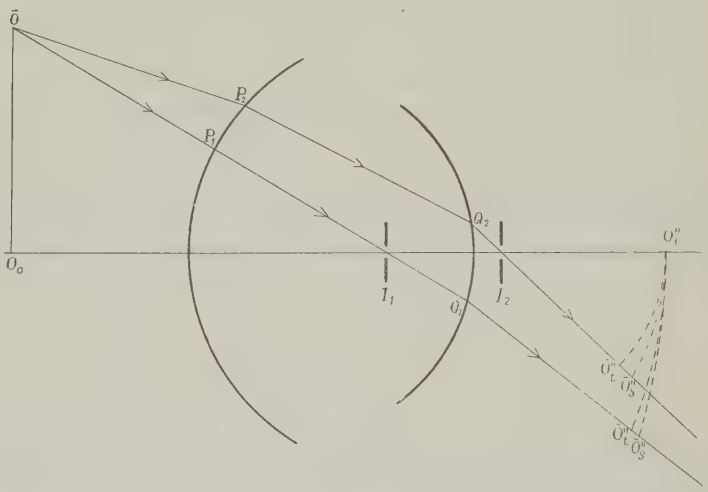


Fig. 6. Bländlägets inflytande på avbildningen vid sned incidens.

Sådan ter sig avbildningen vid oändligt tunna knippen. Nästan i alla optiska instrument måste vi för att förbättra avbildningen sätta in en eller flera bländor, varigenom de perifera strålarna, som göra bilden dålig, avbländas och de verksamma knippena just bli tunna. Finnas flera konkurrerande bländor, så finnes alltid en som på grund av 1) sitt läge och 2) sin litenhet blir den som mest begränsar ljuset. Den kallas därför den *effektiva* bländan.

Om vi tänka oss den effektiva bländan mycket liten, ja så liten att den bara släpper igenom en enda h-stråle, låt vara med sina tillhörande oändligt närliggande knippestrålar, så blir följande resonemang lättare att förstå.

Antag, att i figur 6 med två brytande ytor den punktformade effektiva bländan sitter vid I_1, således mellan de båda brytande ytorna. Av alla h-strålar som utgå från $\bar{O}$ blir det då endast en, som med sina knippestrålar kan släppas igenom I_1 och gå igenom hela systemet. Avbildningen av $\bar{O}$ genom båda ytorna ger då upphov till bildpunkterna $\bar{O}_t''$ och $\bar{O}_s''$.

Från en annan objektpunkt blir det även ledes endast en enda h-stråle, som tack vare bländan släppes igenom hela systemet. T-strålarna inom motsvarande knippe ge då upphov till en bildpunkt och s-strålarna till en annan. För varje objektpunkt få vi på detta sätt två bildpunkter, och motsvarande den kontinuerliga objektlinjen få vi därför på bildsidan två kontinuerliga bildlinjer, den tangentiala och den sagittala bildlinjen. Om den gaussiska bildpunkten ligger i O_0'', och märk väl att dennas läge är oberoende av bländläget, så förlöpa båda dessa bildlinjer genom den gaussiska bildpunkten och tangera varandra i densamma. Dessa bildlinjer äro kroklinjer av mycket komplicerad art, men nära systemaxeln kan man utan större fel betrakta vardera såsom en cirkel med viss radie. Se vi problemet tredimensionellt, så finna vi, att bilden av planet genom O_0 blir två klotformiga bildytor, den tangentiella och den sagittala bildytan, vilka tangera varandra i den gaussiska bildpunkten.

En eventuell korrektion av denna astigmatism skulle innebära, att dessa båda bildytor bragtes att överallt sammanfalla till en enda klotyta, en anastigmatisk bildyta, såsom vi förut kallat p-ytan. Med andra ord: t- och s-ytorna skulle erhålla samma radievärden, enär de alltid tangera varandra i en punkt.

Vi ha hittills antagit, att den punktformiga bländan är vid I_1. Men antag att den i stället är placerad vid I_2. Då kan beträffande t. ex. objektpunkten $\bar{O}$ vår föregående h-stråle $\bar{O}P_1Q_1$ ej gå igenom, utan det blir en helt annan, låt vara $\bar{O}P_2Q_2$, som släppes igenom hela systemet. Men för

denna få vi ju redan beträffande första ytan andra objektavstånd och andra infalls- och brytningsvinklar än förut, vadan också de astigmatiska bildpunkterna av $\bar{O}$ få helt andra lägen. Detsamma gäller för alla objektpunkter mellan O_0 och $\bar{O}$. De båda bildytorna, vilka visserligen såsom förut måste tangera varandra i gaussiska bildpunkten O_0'', få således helt nya radier och astigmatismen andra värden. Alla dessa förhållanden ändras således med *bländans läge*, varför vi i de följande formlerna för *As* vid sned incidens och för dess korrektion alltid måste återfinna någon storhet, som bestämmer effektiva bländans läge. Och i själva verket är ej ett system vid sådan avbildning fullt bestämt, förrän man känner läget av den effektiva bländan.

Vi gå nu till den viktiga frågan, vart vi skola förlägga bländan vid vårt system: fixt glasöga + rörligt öga. Vid det ständiga blickandet sammanfalla glasets och ögats axlar endast momentant. Vinkeln mellan dessa axlar varierar ständigt. *Anatomiska* underlaget för bländan beträffande hela systemet ligger i ögat och utgöres av ögats pupill. Men denna ligger långt framför ögats rotationspunkt och undergår vid blickandet sålunda stora lägeförändringar. Vi ha sett, att det endast är en högst liten del av glasets bild, nämligen den som sedan i sin tur avbildas i fovea, som behöver strängt korrigeras. Det är således endast avbildningen utefter axeln på det — märk väl — vid blickandet *rörliga* ögat, som ständigt behöver korrigeras. Men alla ögats axellägen vid blickandet gå genom Z (fig. 3), som är den enda fixa punkten vid ögats rotation. I Z korsas således alla axellägena, och det blir därför till denna ögats rotationspunkt som bländans mittpunkt fysikaliskt måste förläggas.

Läsaren tycker måhända efter denna framställning, att denna fordran är tämligen självklar. Men trots ivrigt spekulerande och fingrande på problemet skulle det dock dröja ända till 1904, innan denna sanning i tryck offentligt blev uttalad, klarlagd och i räkning fullt exakt tillämpad. Det var den danske oftalmologen TSCHERNING, då föreståndare

för fysiologisk-optiska laboratoriet i Paris, sedermera ordinarie professor i oftalmologi vid universitetet i Köpenhamn, som gjorde det. Medelst en elegant analytisk metod beräknade han generellt och fullt exakt glasets erforderliga krökningar vid korrektion av denna astigmatism *med bländan i Z*. Han fann samtidigt, att den numera för båda h-planen gemensamma anastigmatiska bildytan, vår gamla p-yta, *icke* blev plan utan klotformig med radievärden, som han kunde bestämma.

Så långt voro hans spekulationer och beräkningar fullt exakta, och vid dessa borde han ha stannat. Men i stället beklagade han klotformen hos p-ytan, som han ansåg borde vara plan i likhet med fallet vid fotografiska objektivet. Han visade nu, fullt exakt f. ö., men ju alldeles onödigt, att det var en omöjlighet att samtidigt korrigera *As* och göra p-ytan plan. Detta misslyckande var tur för TSCHERNING, ty hade det lyckats honom, hade han felaktigt löst problemet. Nu blevo hans räkningar trots allt riktiga.

Det blev först v. ROHR, vetenskaplig medarbetare hos Zeiss, icke oftalmolog, förunnat att så sent som 1909 uttala den sanningen, att den fullt ideala anastigmatiska bildytan alldeles *icke* bör vara plan utan tvärtom klotformig och just sammanfalla med hans vid den tiden definierade fjärrpunktsyta. Vi ha förut redogjort för denna fordran och vi kunna väl nu blott förvåna oss över att det skulle dröja så länge, innan den blev formulerad. Ett sannskyldigt Columbi ägg!

Då p-ytan, såsom också redan är sagt, emellertid endast rent tillfälligtvis kan sammanfalla med fjärrpunktsytan, så inverkade i själva verket denna v. ROHRS fordran ej alls på riktigheten av TSCHERNINGS beräkning av p-ytan, vilken vi nu skola genomgå. För att förstå denna måste vi emellertid förutskicka en del allmänna definitioner och beteckningar angående bländans läge.

I ett centrerat system (fig. 7), där således alla medelpunkterna ligga på samma räta linje, må den punktformiga

bländan I sitta mellan 2:a och 3:e ytan och den enda h-stråle, som från en perifer objektpunkt $\bar{O}$ kan gå genom bländan och därmed genom hela systemet, må vara $\bar{O}E_1E_2IE_3E_4$ o. s. v. Den i 1:a ytan (S_1-ytan) infallande strålen $\bar{O}E_1$ skulle *utdragen* i ljusets riktning träffa systemaxeln i P_1, men brytes i själva verket i 1:a ytan utefter E_1E_2, som i sin tur

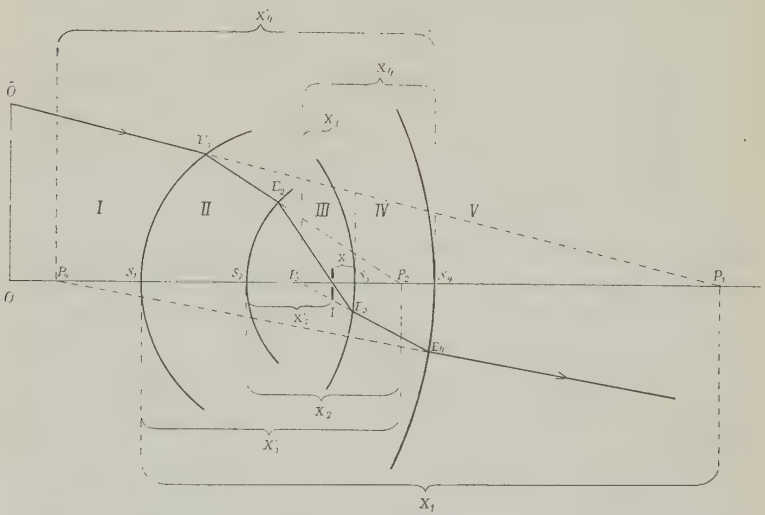


Fig. 7. En snett infallande h-stråles gång genom ett system av 4 brytande ytor med bländan vid I.

utdragen skulle skära axeln i P_2. I avseende på denna avbildning i 1:a ytan kunna vi därför osökt betrakta P_1 såsom objektpunkt utefter axeln i 1:a mediet (här luft) och P_2 såsom motsvarande bildpunkt i medium 2. Vid avbildningen i 2:a ytan (S_2-ytan) brytes E_1E_2 mot bländan I, varvid P_2 må anses såsom objektpunkt i detta medium (medium II) och I såsom bildpunkt i medium III.

I överensstämmelse med gängse bruk betecknas i den fortsatta framställningen alla avstånd från en brytande yta till själva bländan eller till en punkt, som är konjugerad med bländan, med bokstaven x i stället för s, varvid x förses med

en prim (x'), då därmed avses ett bildavstånd. Vi få sålunda för objektavståndet S_1P_1 beteckningen x_1 och för S_1P_2, som är bildavstånd, x'_1. Vidare bör S_2P_2 kallas x_2 och S_2I såsom varande ett bildavstånd x'_2.

Den framför bländan liggande delen av systemet kallas framkombinationen, den bakom liggande bakkombinationen. Vid avbildningen i bakkombinationens 1:a yta, i detta fall S_3-ytan, betraktas bländan I såsom objektpunkt utefter axeln. Strålen IE_3 brytes utefter E_3E_4, som förlängd bakåt skär axeln i punkten P_3, som nu betraktas såsom bildpunkt av bländan I vid avbildning i 3:e ytan. Avståndet S_3I såsom varande ett objektavstånd blir x_3 och S_3P_3 blir x'_3 såsom varande bildavstånd o. s. v.

Vid de nu betraktade avbildningarna av axelpunkter, där bländan spelar huvudrollen, uppträder naturligtvis sfärisk aberration, och i själva verket äro dessa x-värden i allmänhet variabla aberrationsvärden, som variera med h-strålens läge, d. v. s. med dess elongation. Emellertid kan man också tänka sig bländan avbildad med nollstrålar, och då får man vissa x-nollvärden, som lämpligen böra kallas x_{01}, x'_{01}, x_{02}, x'_{02} o. s. v. Det är precis samma beteckningssätt, som då vi vid avbildningen av den verkliga axelobjektpunkten O och dess bildpunkt O' betecknade motsvarande axelavstånds s-värden med s_0 (sid. 11).

Det blir endast två fall, där dessa x-aberrationsvärden icke variera, nämligen axelavståndet mellan bländan och närmaste ytan framför och närmaste ytan bakom densamma, i fig. 7 således x'_2 och x_3. Bländan är ju fix i alla blickriktningar och de verksamma h-strålarna måste ständigt rätta sig efter det givna bländläget, vadan för alla h-strålar, således även för de paraxiala strålarna, dessa båda axelavstånd bli konstanta. I fig. 7 få vi sålunda:

$$x'_2 = x'_{02} \quad \text{och} \quad x_3 = x_{03}.$$

Jag ber att få lägga mycken vikt vid dessa noll-värden, emedan man i de följande formlerna lyckats överallt elimi-

nera de allmänna, varierande såväl x- som *s-aberrations*-värdena och ersätta dem just med motsvarande lätt beräknade och konstanta gaussiska noll-värden.

Vi skola nu tillämpa dessa beteckningar på vårt fall (fig. 8): ett fixt glas med S_1S_2-ytorna framför ett öga, vars rotationspunkt är Z, dit vi också tänka oss den punktformiga bländan I förlagd. Ett system således med endast framkombination.

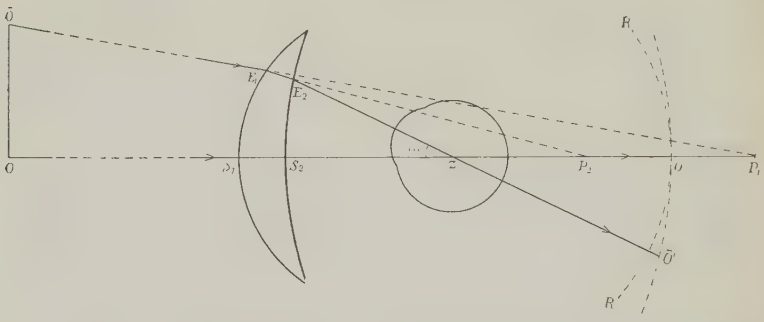


Fig. 8. Fjärrpunktsytan och den anastigmatiska bildytan.

Strålen $\bar{O}E_1E_2Z$ är den enda h-stråle, som från perifera objektpunkten $\bar{O}$ kan gå genom bländan. I förlängningen av dess första strålbana ha vi axelpunkten P_1 och i förlängningen av den andra banan axelpunkten P_2. Axelavståndet S_1P_1 blir således x_1 och $S_1P_2 = x'_1$. Vid brytningen genom andra ytan blir P_2 objektpunkt och bländan Z bildpunkt. Således $S_2P_2 = x_2$ och $S_2Z = x'_2$ och *märk väl* = gaussiska noll-värdet x'_{02}. Ögat är roterat vinkeln ω, så att den sista delen av den verksamma h-strålbanan sammanfaller med ögats optiska axel och sålunda går genom fovea.

Av de nämnda x-värdena är det sistnämnda, $x'_2 = x'_{02}$, det viktigaste, emedan vi kunna anse oss känna dess storlek på förhand. Sätta vi nämligen lämpliga avståndet från glasest bakre yta till hornhinnans topp = 12 mm och för ett normalöga avståndet mellan samma topp och Z lika med 13 mm, få vi $x'_{02} = 25$ mm såsom standardavstånd.

TSCHERNING använde de förut kända Abbeska summationsformlerna för korrektion av *As*. Dessa gälla godtyckligt antal brytande ytor (k antal ytor) och ha förut använts vid konstruktionen av mera komplicerade system. Med hjälp av formlerna för avbildning vid sned incidens (sid 13) och efter utvecklande av funktionerna av incidens- och brytningsvinklar i serie, med försummande av små kvantiteter fr. o. m. 3:e ordningen, hade ABBE presenterat dem i följande form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n'_k \varrho'_{tk}} &= \sum^{k} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) - 3\sum^{k} \frac{Q_x^2}{(Q_x - Q_s)^2}\left(\frac{1}{n' s'_0} - \frac{1}{n s_0}\right) \\ \frac{1}{n'_k \varrho'_{sk}} &= \sum^{k} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) - \sum^{k} \frac{Q_x^2}{(Q_x - Q_s)^2}\left(\frac{1}{n' s'_0} - \frac{1}{n s_0}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

ϱ'_{tk} och ϱ'_{sk} betyda tangentiala resp. sagittala bildytans radier efter brytningen i sista (den k-te) ytan, n'_k brytningsindex i sista mediet. Så ha vi Q_s och Q_x. Gaussiska avbildningsformeln för en yta var:

$$\frac{n'}{s'_0} = \frac{n}{s_0} + \frac{n' - n}{r}.$$

Denna ekvation kan skrivas så här:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'_0}\right).$$

Uttrycken på var sin sida om likhetstecknet äro ju här exakt lika byggda. Skillnaden är blott den, att i det ena ingå storheter på objekt- och i det andra på bildsidan. Radien r är gemensam för båda sidorna. Sådana uttryck bibehålla sig således lika vid brytningen i en yta och kallades därför av ABBE för *optiska invarianter*.

Just denna invariant kallade ABBE Q_s.

Beträffande den tänkta gaussiska avbildningen av bländdans mittpunkt I hade vi allmänna beteckningen x_0 i stället

för s_0. För axelpunkten I gäller således en formel av samma byggnad som föregående, nämligen:

$$\frac{n'}{x'_0} = \frac{n}{x_0} + \frac{n'-n}{r}.$$

Denna kan skrivas analogt:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'_0}\right),$$

och denna invariant kallade ABBE Q_x.

Under den långa räkningen till slutformlerna (a) hade ABBE således överallt lyckats få in de gaussiska värdena s_0 och x_0 i stället för aberrationsvärdena s och x.

Villkoret för korrektion av As är tydligen att t- och s-ytornas radier efter sista brytningen äro lika, d. v. s. att

$$\varrho'_{tk} = \varrho'_{sk} \quad \text{eller att} \quad \frac{1}{n'_k \varrho'_{tk}} = \frac{1}{n'_k \varrho'_{sk}},$$

d. v. s. att de båda högra leden i formlerna (a) äro lika. Men detta villkor kan ej uppfyllas med mindre än att

$$\sum^{k} \frac{Q_x^2}{(Q_x - Q_s)^2}\left(\frac{1}{n's'_0} - \frac{1}{ns_0}\right) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Denna ekvation innehåller således slutliga villkoret för $As = 0$. Om nu verkligen As är hävd, då, men också endast då, fås den numera gemensamma bildytans radie (ϱ'_{stk}) efter sista brytningen helt enkelt ur formeln:

$$\frac{1}{n'_k \varrho'_{stk}} = \sum^{k} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right). \qquad \text{(c)}$$

Dessa Abbeska (b)- och (c)-formler var det som TSCHERNING tillämpade på ett system av 2 brytande ytor (glasögat) med ögats rotationspunkt som blända, och det gällde nu att bringa de två bildytorna att sammanfalla. Vi antaga i fig. 8 ögat hyperopt och ackommodationslöst. Glaset avbildar således axelpunkten O gaussiskt i fjärrpunkten O',

genom vilken den streckade fjärrpunktsytan $RO'R$ går. För enkelhets skull antog TSCHERNING glaset *tunt*. Han använde det numera gammalmodiga räknesättet med radievärden och icke GULLSTRANDS vid den tiden ganska nya dioptriräkning. Jag använder nu den sistnämnda, bekvämare metoden. Brytkraften hos första glasytan betecknas därvid med D_1, hos andra ytan med D_2 och glasets hela brytkraft med D_{12}.

Vi börja då med (c)-formeln. Här är $k = 2$, och summationstecknet betyder, att vi först sätta in värdena för 1:a och sedan för 2:a ytan och så addera de båda på så sätt erhållna uttrycken. Vi få då:

$$\frac{1}{n'_2\, \varrho'_{st2}} = \frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{n'_1} - \frac{1}{n_1}\right) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{n'_2} - \frac{1}{n_2}\right).$$

Men vid lins i luft ha vi, om glasets index är n och luftens $= 1$:

$$n_1 = 1;\ n'_1 = n_2 = n;\ n'_2 = 1,$$

vadan vi få:

$$\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{r_2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Men nu är (enl. sid. 11):

$$D_{12} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

vadan

$$\frac{1}{\varrho'_{st2}} = -\frac{D_{12}}{n} \quad \text{och} \quad \varrho'_{st2} = -\frac{n}{D_{12}}. \qquad \text{(d)}$$

I denna enkla formel ingå varken objektavståndet s_{01} eller bländavståndet x'_{02}. Den innebär därför helt enkelt, att om jag blott håller ett glas av given styrka D_{12} ständigt anastigmatiskt genom erforderlig krökningsgrad, d. v. s. om vi blott ständigt hålla uttrycket (b) $=$ noll, så blir, men också endast då, den anastigmatiska bildytans radie konstant och $= -\frac{n}{D_{12}}$ för godtyckliga s_1- och x'_2-värden.

Vi anta, att det översynta ögat i fig. 8 korrigeras för oändligheten av ett glas + 5,0 dptr i det angivna läget. Avståndet S_2Z är 2,5 cm. Ögats fjärrpunkt O' ligger då 20 cm från S_2 (glasets tjocklek försummas även här) och 17,5 cm från Z. Fjärrpunktsytan har alltså en radie av — 17,5 cm (radien räknas alltid från ytan till medelpunkten och positiv i ljusets riktning). Nu må detta glas vara anastigmatiskt för $s_1 = \infty$. Den anastigmatiska bildytans radie få vi då för $n = 1{,}5$: $\varrho'_{st2} = -\frac{1{,}5}{5} = -0{,}30$ m. Således är p-ytan svagare krökt än fjärrpunktsytan. Detta är det vanligaste fallet, vilket såsom vi sett betyder, att vid fortsatt blickning åt sidan ögat måste mer och mer ackommodera.

Om vi anta, att det närsynta ögat i fig. 3 korrigeras av glaset — 10 dptr och avståndet mellan glaset och Z fortfarande är 2,5 cm, blir fjärrpunktsytans radie + 12,5 cm. Den anastigmatiska bildytans radie skulle i detta fall bli: $-\frac{1{,}5}{-10} = +0{,}15$ m, även i detta fall sålunda numeriskt större än fjärrpunktsytans. Däremot ger p-glaset — 20 i samma läge framför ett öga med motsvarande myopigrad en anastigmatisk bildyta med samma krökning som fjärrpunktsytan. Bådas radie är nämligen 7,5 cm.

Villkoret för anastigmatism få vi ur (b)-formeln. I allmänhet är

$$Q_x - Q_s = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0}\right) - n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n\left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{x_0}\right);$$

eller om man använder invarianterna på bildsidan:

$$n'\left(\frac{1}{s'_0} - \frac{1}{x'_0}\right).$$

Efter insättning för 1:a ytan får man vid lämplig användningen av invarianterna på objektsidan:

$$\frac{n_1^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{x_{01}}\right)^2}{n_1^2\left(\frac{1}{s_{01}} - \frac{1}{x_{01}}\right)^2}\left(\frac{1}{n'_1 s'_{01}} - \frac{1}{n_1 s_{01}}\right) = T_1.$$

För ytan n:o 2 användas lämpligast invarianterna på bildsidan, och efter insättning få vi då:

$$\frac{(n'_2)^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{x'_{02}}\right)^2}{(n'_2)^2\left(\frac{1}{s'_{02}}-\frac{1}{x'_{02}}\right)^2}\left(\frac{1}{n'_2 s'_{02}}-\frac{1}{n_2 s_{02}}\right)=T_2.$$

Om nu 1:a och 2:a termen kallas T_1 och T_2, så blir villkoret för $As=0$:

$$T_1+T_2=0.$$

Här känna vi på förhand endast s_{01} och x'_{02} samt $n_1=1$, $n'_1=n'_2=n=$ glasets index, $n'_2=1$. Det gäller således att eliminera de andra storheterna: r_1, r_2, x_{01}, s'_{02} och s'_{01}, som vid *tunt* glas är $=s_{02}$. Vi böra således skaffa oss dem generellt uttryckta såsom funktioner dels av de kända konstanta storheterna n, D_{12}, s_{01}, x'_{02}, dels av den variabel, som vi ämna använda såsom mått för glasets krökning. Vi kunna därtill välja endera 1:a eller 2:a ytans dioptriska styrka, som må vara D_1 resp. D_2. Vi välja 1:a ytans styrka D_1. Emedan glaset antogs tunt, blir D_2 helt enkelt bestämt ur formeln: $D_{12}=D_1+D_2$. Det blir nu de enkla gaussiska formlerna, som användas vid eliminationen. För att få bort t. ex. s'_{02} ha vi formeln för avbildningen genom *hela* glaset D_{12}, nämligen:

$$\frac{1}{s'_{02}}=\frac{1}{s_{01}}+D_{12}=A_1+D_{12},\quad \text{om}\quad \frac{1}{s_{01}}=A_1.$$

x'_{02} är ju betraktad såsom *bländans* bildavstånd, ävenledes vid avbildning genom *hela* glaset D_{12}. Då är bländans objektavstånd $=x_{01}$. Vi få således ekvationen:

$$\frac{1}{x'_{02}}=\frac{1}{x_{01}}+D_{12},\quad \text{varav}\quad \frac{1}{x_{01}}=\frac{1}{x'_{02}}-D_{12}=X'-D_{12},$$

$$\text{om}\quad \frac{1}{x'_{02}}=X'.$$

Storheten $s'_{01} = s_{02}$ lösa vi ur den ekvation, som utgör avbildningsekvation för 1:a ytan, nämligen:

$$\frac{n}{s'_{01}} - \frac{1}{s_{01}} + D_1 = A_1 + D_1 .$$

Radien r_1 få vi ur ekvationen: $D_1 = \frac{n-1}{r_1}$, varav $\frac{1}{r_1} = \frac{D_1}{n-1}$.

Slutligen få vi r_2 medelst formeln: $D_2 = \frac{1-n}{r_2}$. I stället för D_2, som vi ju ej vilja ha med, sätta vi: $D_2 = D_{12} - D_1$ och få således $\frac{1}{r_2} = \frac{D_1 - D_{12}}{n-1}$.

Vi ha nu alla storheterna r_1, r_2, x_{01}, s'_{02}, $s'_{01} = s_{02}$, som vi inte ville ha med, uttryckta såsom funktioner endast av D_1, D_{12}, A_1, X' och n. Vi sätta nu in dessa uttryck i formeln $T_1 + T_2 = 0$ och få efter en hel del räkningar såsom villkor för $As = 0$ denna ekvation:

$$\left.\begin{aligned} &(n+2)\,D_1^2 - (n+2)\,D_{12}D_1 - 2\,(n^2-1)\,(X'+A_1)\,D_1 + \\ &+ nD_{12}^2 + (n-1)\,[2nX' - (n+1)\,(n-2)\,A_1]\,D_{12} + \\ &+ n(n-1)^2\,(X')^2 + 2(n-1)^2\,(n+1)\,A_1X' = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{(e)}$$

där sålunda D_{12} betyder glasets hela styrka, n glasets index, $X' = \frac{1}{x'_{02}}$ och $A_1 = \frac{1}{s_{01}}$. Ur ekvationen kan man för varje kombination av dessa storheter bestämma D_1 såsom mått på 1:a glasytans styrka, d. v. s. också på glasets krökning, så att $As = 0$. Är D_1 bestämd, så följer ju 2:a ytans styrka D_2 helt enkelt ur ekvationen: $D_{12} = D_1 + D_2$, emedan glaset antogs *tunt*.

Vi se, att ekv. är av 2:a graden med avseende på D_1; i allm. finnas således 2 lösningar. Löst i avseende på D_1 ger den:

$$D_1 = 0{,}5\,D_{12} + \frac{n^2-1}{n+2}(X'+A_1) \pm \frac{0{,}5}{n+2}\sqrt{-(3n-2)\,(n+2)\,D_{12}^2 - }$$

$$\overline{- 4(n-1)^2\,(n+2)\,[X' - (n+1)\,A_1]\,D_{12} + 4\,(n-1)^2\,[X' - (n+1)\,A_1]^2}.$$

Här har man således att sätta in de givna värdena på D_{12}, A_1, X' och n för att erhålla D_1. Skall korrektionen göras för oändligheten, såsom man gjort i de flesta fall i praktiken, så har man $A_1 = 0$, och ekvationen förenklas åtskilligt.

Stor praktisk betydelse har frågan, huru stor den serie glas är inom vilken det överhuvud taget är möjligt att realisera villkoret $As = 0$. För denna fråga gäller följande resonemang. Skulle diskriminanten, ψ, bli neg., så bli $\sqrt{\psi}$ och därmed även D_1 icke längre reella, vadan problemet då är olösligt. Det gäller sålunda att taga reda på för vilka värden på D_{12} man får $\psi \geqq 0$. Detta göres såsom bekant på det viset, att man löser ekvationen $\psi = 0$, i detta fall i avseende på D_{12}. Emedan ekvationen med avseende på D_{12} är av 2:a graden, får man då två gränsvärden.

För en vanlig sifferkombination: $n = 1{,}523$; $s_{01} = -\frac{1}{3}$ m med $A_1 = -3$; $x'_{02} = 25$ mm med $X' = 40$, får man det ena D_{12}-värdet $= +9{,}27$, det andra $= -29{,}52$ dptr. För just dessa gränsvärden blir $\psi = 0$, problemet lösligt, men vi få för vardera D_{12}-värdet blott ett D_1-värde. Men mellan dessa gränser blir $\psi > 0$, och vi få inte blott problemet lösligt, utan vi få för varje D_{12}-värde inom denna serie alltid två D_1-värden, som göra $As = 0$. För varje nummer mellan de nämnda gränsvärdena inom denna serie finnas således 2 krökningar på glaset, som ge $As = 0$. Om glaset beräknas för oändligt objektavstånd, d. v. s. $A_1 = 0$, ligga gränserna för D_{12} i stället vid $+7{,}79$ och $-24{,}83$ dptr.

Grafiskt återges sambandet mellan D_1 och D_{12} i fig. 9, med värdena $n = 1{,}523$, $A_1 = 0$ och $X' = 40$. De högre D_1-värdena, motsvarande ellipsens övre del, ha endast teoretiskt intresse, enär så starkt krökta glas bli ytterst obekväma att bära. Alla de i marknaden förekommande p-glasen motsvara de lägre D_1-värdena.

Vid denna analytiska lösning av problemet ha som nämnts ett flertal approximationer gjorts. Bl. a. har glasets tjocklek försummats. Medtages även denna storhet, bli

formlerna ännu mera invecklade, den slutliga kurvan dock föga förändrad. Den beräkning av glasens krökning, som ligger till grund för själva tillverkningen av glaset, använder de ur den analytiska lösningen funna måtten endast såsom orienterande närmevärden, vilka sedan justeras efter trigonometriska beräkningar av utvalda perifera h-strålars gång genom glaset. Det har emellertid visat sig, att endast små korrektioner behövas.

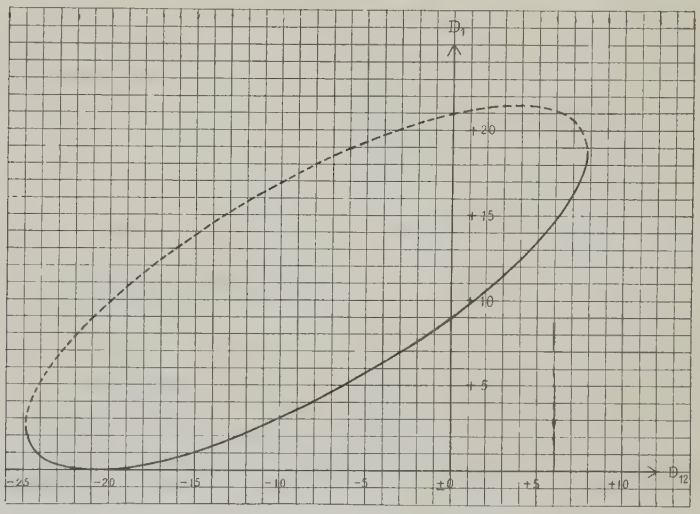


Fig. 9. Tschernings ellips visande främre ytans brytkraft (D_1) hos ett anastigmatiskt glas av styrkan D_{12}.

Om det sålunda är möjligt att framställa praktiskt taget anastigmatiska glas för det rörliga ögat, får man å andra sidan ej bortse från att den anastigmatiska avbildningen genom ett dylikt glas är beroende av vissa givna betingelser. Några må här påpekas. Glasets axel måste gå genom ögats vridningspunkt. En felaktig centrering av glaset leder därför till att glasets astigmatismfrihet ej kan utnyttjas. Vidare är ett för oändligt objektavstånd beräknat p-glas ej anastigmatiskt för t. ex. det vanliga läsavståndet. Alla p-glas äro slutligen beräknade för ett och samma X'-värde, vanligen

40, motsvarande 25 mm avstånd mellan glaset och ögats vridningspunkt, och glasen äro avsedda att bäras 12 mm framför hornhinnans toppunkt. Emellertid torde avståndet från denna punkt till ögats vridningspunkt just i de fall, då starka glas behövas och då astigmatismen vid sned incidens överhuvud taget får någon större praktisk betydelse, ej uppgå till 13 mm. Hos ett starkt myopt öga är avståndet säkert större och hos ett hyperopt mindre. Huvudanledningen till dylika större brytningsfel är nämligen som bekant en förlängning, resp. en förkortning av ögats axel. Rationellt skulle vara att räkna med ett mindre X'-värde för starka minusglas och med ett större för starka plusglas.

Dessa mer eller mindre oundvikliga brister hos p-glasen ha emellertid i praktiken visat sig vara av ringa betydelse, och p-glasen måste sägas utgöra ett mycket värdefullt framsteg inom glasögonindustrin.

Såsom förut framhållits, ligga gränserna för p-glasen vid c:a + 8 och — 25 dptr. En lycklig tillfällighet gör, att de allra flesta brytningsfelen i människoögat också falla inom dessa gränser. Det finns emellertid ett jämförelsevis vanligt fel, som faller utanför, och det är den starka hyperopin hos ett öga, där linsen borttagits t. ex. genom en starroperation. Om ett sådant öga ej förut varit starkt myopiskt, brukar ett glas av + 10 à + 12 dptr erfordras för seende på långa och + 13 à + 16 på korta avstånd. På GULLSTRANDS initiativ ha Zeiss-verken framställt anastigmatiska glas även av dessa styrkor, varvid emellertid glasets ena yta måste göras asfärisk. Dessa glas gå under namnet katralglas eller Gullstrandsglas. Den komplicerade slipningsproceduren medför tyvärr att dessa glas äro mycket dyra.

Det här flera gånger påpekade felet hos p-glasen, att den anastigmatiska bildytan ej sammanfaller med fjärrpunktsytan, föranledde för några år sedan (1921—22) GLEICHEN att lansera en ny glassort, de s. k. largonglasen, som enligt reklamen skulle vara p-glasen mycket överlägsna. GLEICHEN utgick från att kongruensen mellan bildyta och fjärrpunkts-

yta skulle vara viktigare än full korrektion av astigmatismen och beräknade sina glas så, att de båda astigmatiska bildytorna kommo att omfatta fjärrpunktsytan (ungefär som C_2- och C_3-ytorna i fig. 3). Den kvarvarande astigmatismen blir därvid för de flesta glasstyrkor obetydlig. Om dessa glas rasade under ett par år en hänsynslös strid mellan de vetenskapliga medarbetarna i olika tyska glasögonfirmor. Stridens häftighet bar tydligt vittne om de stora ekonomiska intressen som lågo bakom. Slutligen bildades emellertid en koncern, som i sig uppslukade largonfirman, varpå detta glas indrogs, och numera hör man aldrig talas om detsamma. Vilket glas som är det bästa har ej avgjorts, men skillnaden kan i varje fall ej vara stor, om den ens kan uppfattas av ögat.

För djupare inträngande i hithörande frågor hänvisas intresserade till v. Rohr och Boegehold: Das Brillenglas als optisches Instrument (Berlin 1934) samt till Czapski och Eppenstein: Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe (Leipzig 1924).

Problemet att bestämma stjärnornas fördelning i rymden.

Av ÅKE WALLENQUIST.

Stellarastronomiens huvuduppgift är att söka utröna vårt stjärnsystems verkliga byggnad. Då vi befinna oss mitt inne i systemet, är denna uppgift mycket svår att lösa. Det teoretiskt sett enklaste sättet att erhålla en naturtrogen bild av vårt stjärnsystem vore att bestämma avståndet och riktningen till de individuella stjärnorna. Ett dylikt förfaringssätt är emellertid, som man lätt inser, i praktiken outförbart. För att få fram en lösning av problemet äro vi hänvisade till statistiska metoder; vi måste i själva verket med tillhjälp av dylika metoder söka beräkna, hur stjärnornas rymdtätheter (d. v. s. antalet stjärnor per volymsenhet) variera med avståndet och riktningen från vår plats i systemet.

Jag vill här nedan i korthet ge en allmän orientering över hur man sökt lösa problemet att bestämma stjärnornas fördelning i rymden.

I. *Problemställningen.*

Vi antaga till en början, att rymden är absolut genomskinlig och att vi således kunna försumma den interstellära ljusabsorptionen. Stjärnljusets intensitet avtar då med kvadraten på avståndet. Kallas stjärnans absoluta ljusstyrka J, dess skenbara ljusstyrka i och avstånd r, gäller således relationen:

$$i = \frac{J}{r^2}. \qquad (1)$$

Om vi i stället använda oss av magnituder, kan sambandet mellan en stjärnas apparenta magnitud m och absoluta magnitud M (d. v. s. den skenbara magnitud, som stjärnan skulle ha, om den placerades på avståndet 10 parsecs från oss) uttryckas genom relationen:[1]

$$M = m + 5 - 5 \log r. \tag{2}$$

Vi betrakta nu ett volymselement av rymden, som innesluts mellan tvenne sfäriska skal med radierna r och $r + dr$ respektive och av rymdvinkeln ω (fig. 1). Volymselementets storlek blir:

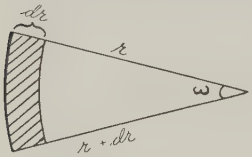


Fig. 1.

$$\omega r^2 dr. \tag{3}$$

Kallas stjärnornas rymdtäthet $D(r)$ (= antalet stjärnor per volymsenhet), blir det totala antalet stjärnor inom volymselementet:

$$\omega D(r) r^2 dr. \tag{4}$$

Om vidare $\varphi(M)$ = luminositetsfunktionen, som anger, hur de absoluta magnituderna äro fördelade inom volymsenheten ($\varphi(M)dM$ anger således antalet stjärnor med absoluta magnituden mellan gränserna M och $M + dM$ inom volymsenheten), erhålles följande uttryck för antalet av de stjärnor inom volymselementet, vilkas absoluta magnituder äro belägna mellan M och $M + dM$:

$$\omega D(r) \varphi(M) r^2 dr\, dM. \tag{5}$$

Genom en undersökning av himmelstrakten kunna vi direkt räkna antalet stjärnor (inom rymdvinkeln ω) inom olika klasser av skenbar magnitud. Observationerna giva oss därvid funktionen $a(m)$, vilken anger antalet stjärnor av apparenta magnituden $m \ldots m + dm$. Å andra sidan

[1] Se t. ex. denna tidskr. årg. *16*, sid. 159.

erhålles ett uttryck för det totala antalet stjärnor av apparenta magnituden m genom att integrera uttrycket (5) mellan gränserna $r = 0$ till $r = \infty$. Vi erhålla då, som man lätt inser, följande relation:

$$a(m) = \omega \int_0^\infty D(r)\varphi(M) r^2 dr. \qquad (6)$$

Denna ekvation bruka kallas för *stellarstatistikens fundamentalekvation*. Den har legat till grund för ett stort antal undersökningar över stjärnornas rymdfördelning och vårt stjärnsystems byggnad, vilka utförts av SCHWARZSCHILD, SEELIGER, CHARLIER, MALMQUIST m. fl.

Fundamentalekvationen ger sambandet mellan de tre funktionerna: $a(m)$ (= »stjärnräkningsfunktionen»), $D(r)$ (= »rymdtäthetsfunktionen») samt $\varphi(M)$ (= »luminositetsfunktionen»). Känna vi två av dessa funktioner, kan den tredje härledas genom att lösa integralekvationen (6). SCHWARZSCHILD har på ett synnerligen elegant sätt med tillhjälp av FOURIERS integralsats funnit den analytiska lösningen till (6). Det intressantaste resultatet, som framgick av denna lösning, var följande. Om funktionerna $a(m)$ och $\varphi(M)$ kunna framställas under formen:

$$\left.\begin{aligned} \log a(m) &= a_0 + a_1 m + a_2 m^2 \\ \log \varphi(M) &= b_0 + b_1 M - b_2 M^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

kan täthetsfunktionen framställas som följande exponentialfunktion av $\log r$:

$$\log D(r) = c_0 + c_1 \log r + c_2 (\log r)^2. \qquad (8)$$

Ha vi således ur observationerna kunnat härleda konstanterna för funktionerna $a(m)$ och $\varphi(M)$ (d. v. s. a_0, a_1, a_2; b_0, b_1 och b_2), kunna vi med tillhjälp av fundamentalekvationen beräkna konstanterna c_0, c_1 och c_2 för täthetsfunktionen (8) och sedan för olika värden på r beräkna rymdtätheten.

II. *En direkt metod för bestämning av stjärnornas rymdtätheter.*

Inskränka vi våra undersökningar till grupper av stjärnor, vilkas absoluta magnituder uppvisa endast en ringa spridning kring ett medelvärde, t. ex. stjärnor tillhörande en viss spektral- eller luminositetsklass, kunna vi direkt ur observationerna beräkna rymdtätheten utan att på förhand känna den analytiska formen på täthetsfunktionen. En metod härför har utarbetats av LINDBLAD på grundval av ett förfaringssätt, som ursprungligen härstammar från KAPTEYN. Jag skall i korthet skissera metoden, vilken framgångsrikt använts under det senaste decenniet av bl. a. Uppsala-astronomerna.

Vid denna metod använder man sig även av några viktiga relationer, som upptäckts av MALMQUIST. Han har nämligen funnit, att om stjärnornas absoluta magnituder inom ett rymdelement äro fördelade enligt en normal felkurva, då äro även de absoluta magnituderna för stjärnor, som tillhöra en och samma skenbara storleksklass, fördelade enligt fellagen. Om $M_0 =$ medelvärdet på den absoluta magnituden för den luminositetsklass, som vi undersöka, och $\sigma =$ dispersionen samt $\bar{M}_m =$ medelvärdet på absoluta magnituden för stjärnor av apparenta magnituden m och $\sigma_m =$ den motsvarande dispersionen, gäller enligt MALMQUIST följande relationer mellan dessa storheter:

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_m &= M_0 - \frac{\sigma^2}{\log e} \cdot \frac{d \log a(m)}{dm} \\ {\sigma_m}^2 &= \sigma^2 + \frac{\sigma^4}{\log e} \cdot \frac{d^2 \log a(m)}{dm^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (9)$$

där $a(m) =$ antalet stjärnor av apparenta magnituden m. (Är dispersionen liten, kunna vi sätta $\sigma = \sigma_m$).

Vi antaga nu, att vi bestämt de skenbara magnituderna och spektraltyperna (eller luminositetsklasserna) för stjär-

norna inom ett visst område av himlen (= belägna inom rymdvinkeln ω). Bland dessa stjärnor plocka vi ut dem, som tillhöra en bestämd luminositetsklass, vars absoluta medelmagnitud är M_0 och dispersion σ, och ordna dem efter skenbar magnitud i en tabell av vidstående utseende (Tabell I) där sista kolumnen anger antalet stjärnor av successiv apparent magnitud (a_n står här i stället för den förut använda beteckningen $a(m_n)$).

Med tillhjälp av talen i tabell I kunna vi lätt (t. ex. grafiskt) härleda kvantiteten $\frac{d \log a(m)}{dm}$ och sedan med tillhjälp av ekv. (9) beräkna $\bar{M}_m$ för det ifrågavarande stjärnslaget. (Vi antaga, att dispersionen är liten och sål. $\sigma = \sigma_m$).

Tabell I.

Magnitud-intervall	Medel-magnitud	Antal stjärnor
$m_1 - m_2$	$m_{1,5}$	$a_{1,5}$
$m_2 - m_3$	$m_{2,5}$	$a_{2,5}$
$m_3 - m_4$	$m_{3,5}$	$a_{3,5}$
$m_4 - m_5$	$m_{4,5}$	$a_{4,5}$
...	...	...

Ur $\bar{M}_m$ kunna vi med tillhjälp av ekv. (2) beräkna det mot varje apparent magnitud i Tabell I svarande medelavståndet (r_n).

Vore dispersionen = 0 skulle talen i sista kolumnen av Tabell I direkt ge antalet stjärnor, belägna inom ett sfäriskt skal, vars radier kunna beräknas ur magnitudintervallets gränser. Ur stjärnantalet, den undersökta ytans storlek och det sfäriska skalets begränsningsradier kan man sedan lätt beräkna stjärntätheten.

På grund av dispersionen komma nu stjärntalen, som skenbart tillhöra ett visst avståndsintervall, att spridas över angränsande skal. Vårt antagande, att stjärnorna äro fördelade enligt fellagen runt den absoluta medelmagnituden, möjliggör för oss att beräkna de faktorer, som talen i sista kolumnen i Tabell I måste multipliceras med, för att vi skola erhålla det sannolika antalet stjärnor inom de olika skalen. Vi kalla de enligt fellagen beräknade faktorerna för δ_0, δ_1, δ_2, ...

Tabell I kan nu lätt transformeras till en tabell med argumenten r och m. Göra vi detta och sprida ut antalen över de angränsande skalen, erhålles Tabell II. Raderna inom denna tabell ge således det sannolika antalet stjärnor inom successiva sfäriska skal. Addera vi antalen, som stå på samma rad (d. v. s. tillhöra samma skal) och dividera dem med tillhörande volym, erhållas de sökta rymdtätheterna i sista kolumnen av Tabell II. ($D(r_3)$ t. ex. betyder rymdtätheten för stjärnorna inom det sfäriska skalet med begränsningsradierna $r_{2,5}$ och $r_{3,5}$).

Tabell II.

r \ m	$m_{1,5}$	$m_{2,5}$	$m_{3,5}$	$m_{4,5}$	$m_{5,5}$	...	Rymdtätheter
	$\delta_0 a_{1,5}$	$\delta_1 a_{2,5}$	...			...	$D(r_1)$
$r_{1,5}$	$\delta_0 a_{1,5}$	$\delta_0 a_{2,5}$	$\delta_1 a_{3,5}$	...		...	$D(r_2)$
$r_{2,5}$	$\delta_1 a_{1,5}$	$\delta_0 a_{2,5}$	$\delta_0 a_{3,5}$	$\delta_1 a_{4,5}$	...	...	$D(r_3)$
$r_{3,5}$	...	$\delta_1 a_{2,5}$	$\delta_0 a_{3,5}$	$\delta_0 a_{4,5}$	$\delta_1 a_{5,5}$	...	$D(r_4)$
$r_{4,5}$		...	$\delta_1 a_{3,5}$	$\delta_0 a_{4,5}$	$\delta_0 a_{5,5}$	...	$D(r_5)$
$r_{5,5}$			...	$\delta_1 a_{4,5}$	$\delta_0 a_{5,5}$	...	...
...				...	$\delta_1 a_{5,5}$	...	...
...					...	...	...
...							
Antal stjärnor	$a_{1,5}$	$a_{2,5}$	$a_{3,5}$	$a_{4,5}$	$a_{5,5}$	...	...

III. *Rymdabsorptionens inverkan på den beräknade stjärntätheten.*

Vi ha i det föregående antagit, att rymden varit fullkomligt genomskinlig och att således stjärnljusets intensitet avtagit med kvadraten på avståndet enligt ekv. (1).

Senare årens forskningar ha emellertid visat, att rymden ingalunda kan anses som genomskinlig, utan att en absorption av stjärnljuset förekommer. Dels förefinnes lokala anhopningar av skymmande stoftmoln, som utsläcka eller försvaga ljuset från de bakom liggande stjärnorna. Dylika moln kunna vi i stjärnrika trakter observera som s. k. mörka nebulosor. Dels förefinnes ett utbrett skikt av absorberande materie, som synes vara koncentrerat runt vintergatsplanet.

Vi få därför ej längre försumma absorptionen vid våra undersökningar av stjärnornas rymdfördelning. De förut härledda rymdtätheterna äro ej sanna rymdtätheter utan endast skenbara. Vi kunna emellertid beräkna, hur de observerade tätheterna förändras med absorptionen eller, om man så vill, de korrektioner, som måste anbringas till de direkt härledda rymdtätheterna, för att vi skola erhålla de sanna tätheterna.

Förefinnes en rymdabsorption, avtar stjärnljusets intensitet ej längre med kvadraten på avståndet utan mycket hastigare. Kalla vi $\psi(r)$ en funktion, som beror på absorptionen, kan (1) skrivas under formen:

$$i = \frac{J}{r^2} \cdot \psi(r). \qquad (10)$$

Om ingen absorption förefinnes är $\psi(r) = 1$ och ekv. (10) övergår till (1). Mellan det sanna avståndet r och det skenbara ϱ gäller vidare relationen

$$\varrho = r \,.\, \psi(r)^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

Enär stjärnans skenbara ljusstyrka på grund av absorptionen synes svagare än den skulle vara, om rymden vore fullkomligt genomskinlig, bli de avstånd, som vi beräkna med tillhjälp av ekv. (2) för stora. Taga vi hänsyn till ljusabsorptionen, kan ekv. (2) skrivas under formen:

$$M = m + 5 - 5 \log r + 2{,}5 \log \psi(r). \qquad (12)$$

Om vi sätta $D(r)$ = den sanna rymdtätheten på avståndet r och $A(\varrho)$ = den observerade rymdtätheten (ϱ = det mot r svarande skenbara avståndet), kan man lätt visa, att följande relation gäller mellan dessa båda kvantiteter:

$$D(r) = A(\varrho)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \frac{d\varrho}{dr}. \tag{13}$$

Beräkna vi $\frac{d\varrho}{dr}$ ur ekv. (11), erhålles följande generella uttryck mellan de observerade och sanna rymdtätheterna, vilket först härleddes av SEELIGER:

$$D(r) = A(\varrho) \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi(r)^{\frac{5}{2}}}. \tag{14}$$

Göra vi det enklast tänkbara antagandet beträffande absorptionen, nämligen att absorptionskoefficienten är konstant ($= \nu$), kunna vi sätta:

$$\psi(r) = e^{-\nu r}. \tag{15}$$

Ekv. (14) övergår då till nedanstående uttryck, som ger den sökta relationen mellan observerad och verklig rymdtäthet.

$$D(r) = A(\varrho)\left(1 + \frac{1}{2}\nu r\right) e^{\frac{3\nu r}{2}}. \tag{16}$$

Om vi med α beteckna ljusförsvagningen uttryckt i magnitud per parsec, gäller följande relation mellan α och ν:

$$\nu = \frac{\alpha}{2{,}5 \log e}. \tag{17}$$

Känner man det numeriska värdet på α, kan man lätt med tillhjälp av ekv. (16) beräkna, hur rymdtätheterna förändras under inverkan av absorptionen. Att även blyg-

samma värden på absorptionskoefficienten åstadkomma avsevärda förändringar hos rymdtäthetskurvans förlopp illustreras av fig. 2.

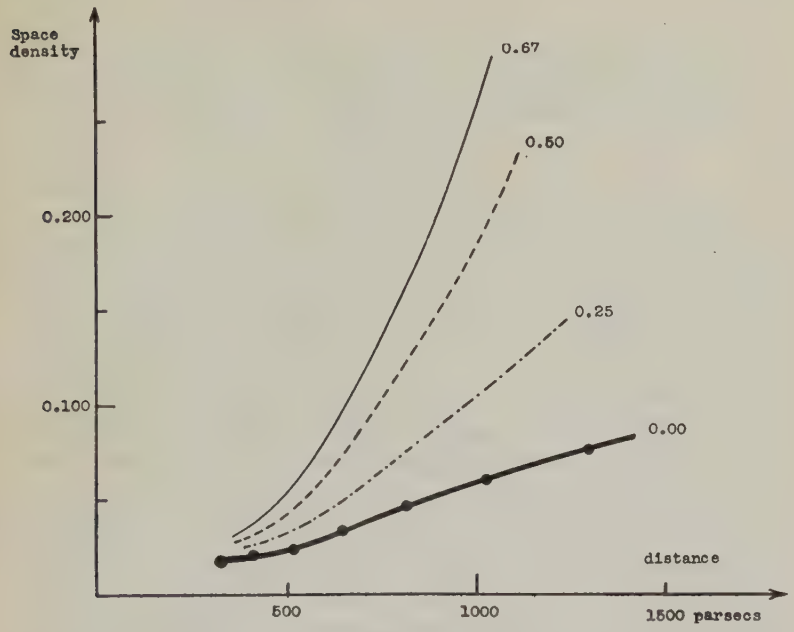


Fig. 2.

Figur 2 visar, hur rymdtätheten för stjärnor tillhörande en viss luminositetsklass varierar i riktning mot det stora stjärnmolnet i Sagittarius (den undre kurvan) samt hur den observerade rymdtäthetskurvan förändras med olika värden på absorptionskoefficienten (de findragna och streckade kurvorna i figuren; siffrorna ange de olika värdena på de antagna absorptionskoefficienterna, uttryckta i magn. per 1000 parsecs; rymdtätheterna äro uttryckta i antalet stjärnor per 1000 kubikparsecs). Av denna figur framgår tydligt, hur viktigt det är, att vi noggrant känna värdet på absorptionskoefficienten vid undersökningar av stjärnornas rymdfördelning.

Observatorium Uppsala, april 1937.

Ett kvantitativt laborationsförsök till massverkningslagen (löslighetsprodukt).

Av **TAGE HOLM.**

Det har försäkrats mig från auktoritativt håll, att det knappast finnes något någorlunda lätt genomförbart försök till Guldberg-Waages lag, som skulle kunna passa som laborationsövning i gymnasiets övre ringar. Det nedan angivna försöket skulle kanske kunna göra dylik tjänst.

Försökets princip. Om man kunde finna ett lagom svårlösligt salt och till dess mättade lösning sätta en viss mängd av en saltlösning, som innehölle en med det förra saltet gemensam jon, så skulle löslighetsprodukten överskridas och en viss mängd av det svårlösliga saltet utfalla. Genom titrering före och efter utfällningen borde de olika kvantiteterna kunna bestämmas. Det lagom svårlösliga saltet borde vara 1+1-värt, ty annars spelar jonkrafterna in i för hög grad, och man kan ej längre räkna med den enkla masslagsformeln. (Som synes av siffrorna nedan är inflytandet av laddningarna redan vid 1+1-salt och de tämligen små koncentrationer, som här användas, mycket betydande.) Vidare borde saltet bestå av någorlunda »bekanta» joner samt vara lätt tillgängligt. Genom en del försök fanns, att lösligheten lämpligen borde ligga vid c:a 2—5 g pr l lösning. Genomgås nu Chemiker-Kalender eller den något fylligare förteckningen i Handbook of Chemistry and Physics, så finner man en del salter, som uppfylla denna senare fordran. Av dessa äro somliga, t. ex. CuCl, svåra att framställa, andra äro »ovanliga», t. ex. TlCl. Bäst uppfyllas fordringarna av silversalter. Av dessa gjordes först försök med $AgOCOCH_3$,

sedan med $AgBrO_3$, och till slut med $AgNO_2$. Acetatet är användbart men har en något för stor löslighet. Bromatet är snarare alltför svårlösligt. Det uppvisade också en del oregelbundenheter åtminstone under de betingelser, som rådde vid mina försök. Jag har senare i ROTH: Physikalisch-Chemische Übungen funnit acetatet omnämnt och en beräkning utförd; och beträffande bromatet behandlar GATEMAN i Outlines of Physical Chemistry detta. Angående nitritet har jag ej kunnat finna någon uppgift.

Försökets beräkning. Över koncentrationen i tillsatslösningen samt över förhållandet mellan kvantiteterna av de båda lösningarna äger man att förfoga. Man bör välja dem så, att dels ej allför stora totalkoncentrationer erhållas, dels mängden av utfällt ämne står i lämpligt förhållande till mängden kvarvarande. Utgår man från att den enkla massverkningslagen kan användas vid en orientering över de kvantitativa förhållandena, erhåller man efter en del räkningar följande.

Beteckningar: m = den mättade saltlösningens koncentration = konc. av vardera jonen; L = saltets löslighetsprodukt = m^2; R = tillsatslösningens konc. = den verksamma jonens konc. före blandn.; y = mängden utfälld substans i mol pr l av blandningens volym; a = antalet ml av det svårlösliga saltets lösning; x = antal ml av tillsatslösningen; $p = x/a$.

Schematisk reaktionsformel:
a ml $AgNO_2$ av konc. m blandas med x ml $AgNO_3$ av konc. R. Därvid erhålles

$$\frac{am}{a+x}\,Ag^{\cdot} + \frac{am}{a+x}\,NO_2{}' + \frac{xR}{a+x}\,Ag^{\cdot} + \frac{xR}{a+x}\,NO_3{}' \rightarrow$$

$$y\,AgNO_2 + \left[\frac{am}{a+x} + \frac{xR}{a+x} - y\right] Ag^{\cdot} + \left[\frac{am}{a+x} - y\right] NO_2{}' +$$

$$+ \frac{xR}{a+x}\,NO_3{}'.$$

Enligt massverkningslagen:

$$\left[\frac{am}{a+x}+\frac{xR}{a+x}-y\right]\cdot\left[\frac{am}{a+x}-y\right]=L.$$

Härur erhålles ett uttryck på y, och genom att undersöka detta finner man, att det har ett maximum för ett p-värde, som beror av R och m. Vid granskning av diagram över dessa storheter, finner man, att R lämpligen bör väljas 0,2—0,5. För y_{max} vid dessa R-värden har då p värden 0,4—0,3. Under dessa omständigheter hör till det mindre R-värdet det större p-värdet och tvärtom. Då y har max., finner man vidare, att förhållandet mellan y och konc. av kvarvarande jon (den jon av det svårlösliga saltet, som är förhanden i *minsta* mängd) är omkring 0,6—0,7, alltså ett lämpligt förhållande.

Försökets utförande. $AgNO_2$ beredes genom att blanda varma lösningar av $NaNO_2$ och $AgNO_3$. Det senare saltet kan vägas upp, om man önskar göra framställningen mera metodiskt, och så kan även ske med nitritet, åtminstone när ej större noggrannhet behövs än i detta försök. Vid lösningarnas blandning faller strax ett vitgrönt konglomerat av mycket små kristaller. Dessa frånfiltreras, och fällningen tvättas med ljumt-kallt vatten 4—5 gånger. Det tvättade saltet kan sedan direkt hällas ned i en större kolv med destillerat vatten, och det hela kokas upp. Lösligheten av saltet är vid 20° c:a 4 g pr l lösning. Vid högre temperatur stiger lösligheten raskt. Den kokande lösningen kan vara mörkfärgad av reducerat silver: en filtrering befriar den härifrån. Den varma, filtrerade lösningen ställes undan, och efterhand utkristallisera mycket långa gröna nålar. Den mättade lösningens halt av silver- och nitritjoner bestämmes genom titrering: på silvret med överskott av NaCl och tillbakatitrering med $AgNO_3$ (indikator K_2CrO_4-lösning); på nitrit med $KMnO_4$. Denna titrering har till grund det vanliga förloppet vid reducering av $KMnO_4$ i sur lösning: $2MnO_4' + 5NO_2' = 5NO_3' + 2Mn'' + 3O''$. Reaktionen går

långsammare mot slutet. Lösningen bör vara varm, c:a 40°. Man måste aktge på, att den mycket flyktiga salpetersyrligheten frigöres vid tillsatsen av svavelsyran, varför man bör hälla ned huvudparten av permanganatet raskt. 0,1-normala lösningar kunna användas. — För detta försök är det ej nödvändigt att känna nitritlösningens ursprungliga styrka; vad som intresserar är jonkoncentrationerna efter det blandning och utfällning ägt rum.

Man häller i två med igenkänningstecken försedda bägare (torra) 100 ml av den mättade silvernitritlösningen. I den ena bägaren häller man 30 ml 0,2-n $NaNO_2$-lösning och i den andra 30 ml 0,2-n $AgNO_3$-lösning. Förhållandet p har alltså valts till 0,3 och $R = 0{,}2$. $NaNO_2$-lösningen kan med tillräcklig noggrannhet beredas genom invägning, särskilt om nitritstängerna fått vistas i torkskåp en tid. Bägarnas innehåll omröras. Fällningen kommer efter någon minut och är »fullständig» efter 10-15 minuter. Bättre värden skulle sannolikt erhållas om fällningen utfördes i flaskor, vilka utsattes för skakning eller rullning några timmar. Vid den angivna anordningen störes jämviktstillståndet av t. ex. adsorptionsfenomen. Vid litet större koncentrationer är fällningen nästan ögonblicklig, vid 0,1-n tillsatslösning vill den ej uppträda med önskvärd snabbhet. Sedan fällningen blivit fullständig, filtreras bägareinnehållen ned i märkta bägare, och i filtraten bestämmas $Ag^{\cdot}$ och NO_2'. I det från $AgNO_2 + NaNO_2$ härstammande provet är jonfördelningen ungefär $[Ag^{\cdot}] = 0{,}0135$ och $[NO_2'] = 0{,}0827$ (medeltal); 50 ml av filtratet bör således taga 6,75 ml 0,1-n NaCl, och en annan portion på 50 ml bör taga 41,35 ml 0,1-n $KMnO_4$. Produkten av de båda koncentrationerna är $11{,}2 \cdot 10^{-4}$. I den från $AgNO_2 + AgNO_3$ stammande lösningen är jonfördelningen ungefär $[Ag^{\cdot}] = 0{,}0827$ och $[NO_2'] = 0{,}0135$, alltså ombytta värden. I verkligheten fås avvikelser från dessa värden, men produkten brukar hålla sig bra konstant.

Det ligger nu nära till hands att jämföra denna jonprodukt med samma storhet i den rena silvernitritlösningen.

I denna har man emellertid $[Ag^{\cdot}] = [NO_2'] = 0{,}0257$ vid 20° (starkt beroende av temperaturen), sål. $L = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$. Det går således ej att säga, att detta L är detsamma som det ovan beräknade. Det är tydligen de interjoniska krafterna, som orsaka avvikelsen. Beräknar man affinitetskoefficienter och bildar produkten $[Ag^{\cdot}] \cdot f_{Ag} \cdot [NO_2'] \cdot f_{NO_2} \quad L_a$, erhållas tal, som äro tämligen konstanta. Då man icke gärna kan gå in på dessa förhållanden i gymnasiekursen, så får man hålla sig till bestämda koncentrationer vid laborationerna. Vill man ha jämförelse med den rena silverlösningen, får man hålla sig till $R = 0{,}1$, och följaktligen vänta en dag eller så på att fällningen skall bli fullständig (och under tiden får man se till, att temperaturen ej ändrar sig för mycket). Då kan man få L-värden, vilka äro endast obetydligt högre än L i ren lösning. Tar man ej med ren lösning, har man litet friare händer och kan då lämpligen hålla sig i området $R = 0{,}2$—$0{,}3$ med $p = 0{,}4$—$0{,}5$. Större variationer äro ej tillrådliga. Tager man lägre p, kommer man in i ett område, där den utfällda mängden mycket snabbt ändrar sig med p, och där således ett fel i p har stort inflytande. För högre p återigen växer totalkoncentrationen, vilket ju ej heller är bra från den synpunkten, att den enkla massverkningslagen får sägas gälla som första approximation för utspädda lösningar.

En fördel med att använda silvernitrit är att man kan utföra enkla titreringsbestämmelser på de båda jonerna oberoende av varandra. Vid de förut nämnda salterna acetat och bromat kan man bekvämt bestämma endast Ag-jonen och får sedan räkna sig till den andra jonens koncentration. Denna räkning är ej alltför svår, men den gör ett oproportionerligt stort intrång i den för laborationen tillmätta tiden. Även för acetat och bromat gäller, att man ej kan ta med den rena lösningens L, ty detta blir alltid avsevärt lägre än de L, som erhållas ur blandningarna.

I nedanstående tabell sammanställas resultaten av en försöksserie. Den elementärt beräknade löslighetsprodukten visar inom dessa gränser tillräckligt god konstans.

Ännu bättre överensstämmelse erhålles — som är att vänta — om man räknar med jonaktiviteterna.

			$AgNO_2 + NaNO_2$				$AgNO_2 + AgNO_3$			
Nr	R	P	$[Ag^+]$	$[NO_2']$	$L \cdot 10^4$	$L_a \cdot 10^4$	$[Ag^+]$	$[NO_2']$	$L \cdot 10^4$	$L_a \cdot 10^4$
1	0.5	0.3	0.0125	0.118	14.8	4.8	0.119	0.0114	13.6	4.8
2	0.3	0.4	0.014	0.091	12.8	4.8	0.098	0.0117	11.5	4.1
3	0.4	0.3	0.014	0.097	13.6	4.9	0.103	0.012	12.4	4.4

Faktorerna i Herons formel.

Med anledning av professor Nat. Beckmans uppsats »Några iakttagelser rörande pytagoreiska trianglar» i denna tidskrifts årg. *20*, sid. 90 ff. vill jag härmed i korthet visa, hur jag finner heltalstrianglar, vid vilkas beräkning två eller alla fyra faktorerna under rotmärket i Herons formel få kvadratiska värden.

För triangelns sidor sättas de homogena uttrycken:

$$a = x^2y^2 + z^2t^2, \quad b = (x^2 - t^2)(y^2 + z^2), \quad c = x^2z^2 + y^2t^2.$$

Man har då $h_b = 2xyzt$ samt

$$p = x^2(y^2 + z^2), \quad p - a = z^2(x^2 - t^2),$$
$$p - b = t^2(y^2 + z^2), \quad p - c = y^2(x^2 - t^2).$$

[För $t = 1$ återkommer man till Beckmans formler.] Vi se, att $p - a$ och $p - c$ äro kvadratiska, om $x^2 - t^2$ är kvadratiskt, likaså att p och $p - b$ äro kvadratiska, om $y^2 + z^2$ är kvadratiskt. Några svårigheter att för x, y, z, och t finna för ändamålet tjänliga värden finnas icke. Om man väljer $y^2 + z^2 = \varrho(x^2 - t^2)$, där ϱ är ett positivt tal, kan $x^2 - t^2$ bortdivideras. Är åter $x^2 - t^2 = \varrho(y^2 + z^2)$, kan $y^2 + z^2$ bortdivideras. Talet ϱ kan också vara kvadratiskt.

Några exempel må anföras:

x	y	z	t	a	b	c	p	$p-a$	$p-b$	$p-c$
5	4	3	4	544	225	481	625	81	400	144
5	4	3	3	481	400	369	625	144	225	256
3	2	1	2	8	5	5	9	1	4	4
7	2	1	2	40	45	13	49	9	4	36
3	11	2	2	221	125	104	225	4	100	121
4	2	1	1	13	15	4	16	3	1	12
3	4	3	2	36	25	29	45	9	20	16

Carl Bodlund.

Tillägg: En annan metod att få alla fyra faktorerna kvadratiska är följande. Sättes

$$p = t^2, \quad p - a = x^2, \quad p - b = y^2, \quad p - c = z^2,$$

får man villkoret

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2.$$

Enligt talteorin är *generella* lösningen till denna ekvation, bortsett från en godtycklig gemensam faktor,

$$x = \pm (ru + sv), \; y = \pm (rv - su), \; z = \pm \tfrac{1}{2} (r^2 + s^2 - u^2 - v^2),$$
$$t = \pm \tfrac{1}{2} (r^2 + s^2 + u^2 + v^2).$$

där r, s, u, v, äro hela tal, vilkas summa är ett jämnt tal. Man förlorar ej någon lösning, om man för att undvika en gemensam faktor 2 väljer två tal jämna och två udda. Sedan erhålles:

$$a = t^2 - x^2, \; b = t^2 - y^2, \; c = t^2 - z^2.$$

De fem första trianglarna i ovanstående tabell erhållas för (r, s, u, v) = resp. (6, 3, 1, 2), (6, 2, 1, 3), (2, 0, 1, 1), (3, 1, 2, 0), (4, 1, 2, 3).

Agne Wahlgren.

Ytan av ett cirkeltrapets.

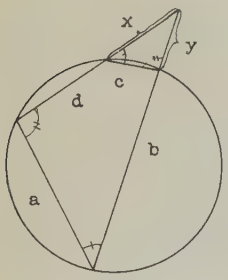
Om a, b, c, d äro cirkeltrapetsets sidor, $2p$ dess omkrets och Y dess yta, gäller den bekanta formeln

$$Y = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (1)$$

Vanligen härledes den trigonometriskt (se t. ex. O. Josephson, Plan geometri, del II, Bonniers förlag). Då räkningarna äro rätt

tidsödande och föga matematiskt givande, torde formeln sällan genomgås i våra skolor.

Följande härledning, som bygger på Herons formel, torde vara av ett visst intresse.



Utdragas två sidor, bildas två likformiga trianglar med ytorna T och t. Man har, om $a > c$

$$\frac{T}{t} = \frac{a^2}{c^2}, \text{ varav } T - t = Y = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cdot t. \qquad (2)$$

Ur likformigheten följer vidare

$$\frac{c}{a} = \frac{x}{y+b} = \frac{y}{x+d}.$$

Genom korresponderande addition och subtraktion erhålles

$$\frac{c}{a} = \frac{x+y}{(b+d)+(x+y)} \quad \text{och} \quad \frac{c}{a} = \frac{x-y}{(b-d)-(x-y)},$$

varav

$$x+y = c \cdot \frac{b+d}{a-c} \quad \text{och} \quad x-y = c \cdot \frac{b-d}{a+c}. \qquad (3)$$

Om $2s$ är topptriangelns omkrets, erhålles ur (3)

$$s = \frac{c+(x+y)}{2} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{b+d}{a-c}\right] = c \cdot \frac{p-c}{a-c},$$

$$s-c = \frac{-c+(x+y)}{2} = \frac{c}{2}\left[-1 + \frac{b+d}{a-c}\right] = c \cdot \frac{p-a}{a-c},$$

$$s-x = \frac{c-(x-y)}{2} = \frac{c}{2}\left[1 - \frac{b-d}{a+c}\right] = c \cdot \frac{p-b}{a+c},$$

$$s-y = \frac{c+(x-y)}{2} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{b-d}{a+c}\right] = c \cdot \frac{p-d}{a+c}.$$

Herons formel ger då

$$t = \sqrt{s(s-c)(s-x)(s-y)} = \frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

som insatt i (2) ger (1).

I samband härmed må erinras om det enkla uttrycket för ytan $= \sqrt{abcd}$, som gäller, om trapetset ej blott kan inskrivas i en cirkel utan även omskrivas kring en cirkel, vilket jag överlåter åt läsaren att själv konstatera.

C. E. Blom.

Laborationsförsök med klor i realskolan.

Av G. STARCK.

De svårigheter, som vidlåda arbetet med klorgas i den traditionella stilen, karakteriserat av klorens framställande i ett kärl, dess uppsamling och användning i andra kärl, äro fullständigt eliminerade, om man utvecklar och använder kloren i samma kärl — ett vanligt provrör. Nedan beskrivna försök kunna utföras var som hälst utan tillgång till dragkapell. Den lilla klormängd, som kommer ut i rummet är lagom stor för att man skall känna lukten; något obehag därav har man ej.

Ett provrör av vanlig storlek (15.170 mm) beskickas med c:a 0.3 g kaliumpermanganat, man tillsätter c:a 4 ml utspädd (4 normal) saltsyra och inskjuter hastigt en lucker asbestpropp, så att den sitter någon cm över vätskeytan. Strax börjar en måttligt hastig klorutveckling, som man vid behov kan påskynda genom ett ögonblicks uppvärmning. Med den klorgas, som samlas i provröret ovanför asbestproppen kunna nästan alla försök med klor utföras. Till varje försök tages nytt rör med ny laddning.

1. Gasens färg iakttages i rörets längdriktning med den vita asbestproppen som utmärkt bakgrund. I kloren nedföres lackmuspapper, blomblad o. d.

2. Antimon tänder sig och brinner.

3. Kopparpulver (reducerad kopparoxid) tänder sig och brinner.

4. Silverpulver (silver, utfällt med koppar ur silvernitrat) tänder sig och brinner.

5. Ett guldblad, upprullat på en glasstav och nedfört i kloren, angripes långsamt under missfärgning. Om glasstaven upptages och avspolas med vatten, erhålles en gul lösning.

6. Stanniol tänder sig och smälter ned.

7. Blyfilspån tända sig ej, men reagera med klorgasen under värmeutveckling, som man kan känna utanpå provröret. Blypulver, utfällt på våta vägen med zink, tvättat med vatten, alkohol och eter, tänder sig och brinner.

8. Zinkpulver tänder sig och brinner.

9. Vit fosfor tänder sig.

10. Röd fosfor tänder sig och brinner. Då man skakar ned fosforn i klorgasen, bör skeden eller spaden hållas minst 5 cm över provrörets mynning, emedan eljest den fosfor, som stannar kvar i skeden, kan tända sig, vilket ju är överflödigt och hindrar en fortsatt tillsats. Vid detta försök är således röd fosfor riskablare än vit — om man nu kan tala om någon risk.

11. Brinnande svavel slocknar i klorgasen, men hinner dock reagera under bildning av en vit dimma med svavelklorurens karakteristiska lukt.

12. Vid förbränning av vätgas eller lysgas använder man ett svårsmält glasrör, utdraget till en rak, ej omböjd spets. Lågan göres så liten som möjligt, 1 à 2 mm lång.

13. Fransk terpentinolja på en remsa filtrerpapper tänder sig; svensk terpentinolja reagerar knappast.

14. Järn, aluminium, magnesium i pulver, kalcium i små raspade spånor reagera ej med klor, men om man blandar dem noga med litet antimon (c:a 10 %), så verkar antimon som initialtändare, så att även dessa metaller kunna fås att brinna. Särskilt kalcium brinner med stor intensitet och utveckling av så mycket värme, att provröret spricker. Tändmetoden är i princip angiven av O. Ohmann, Z. phys. chem. Unterr. *26*, 365 (1913); *27*, 167 (1914).

De matematiska studentuppgifterna.

Med anledning av lektor Hjalmar Olsons uppsats om vårens studentuppgifter i matematik i föregående häfte av tidskriften vill jag lägga fram ett par synpunkter. Beträffande frågan om antalet uppgifter på specialkursens skrivning synes mig förslaget om 7 uppgifter i stället för 6 vara gott. Men beträffande omformuleringsförslagen vill jag i visst avseende anmäla en avvikande mening, även om jag instämmer i flera av de gjorda allmänna uttalandena.

Lektor Olson menar, att i uppgifternas formulering »bör närmare preciseras, dels vad som begäres i resultatet, dels vilka instrument, som få användas för uppgiftens behandling». Det är klart, att formuleringen icke får på något sätt vara otydlig eller ofullständig. Men jag menar, att en precision i den riktning, som lektor Olson avser och som han givit konkreta exempel på, icke är önskvärd. Den binder nämligen för mycket, lämnar icke tillräckligt spelrum för examinandens eget initiativ, fantasi och omdömesförmåga. Därigenom blir den till nackdel vid uppgiftens bedömning, särskilt då det gäller duktiga lärjungar. Och det är ju särskilt dem, som lektor Olson tänker på.

Examinanden bör i viss, icke alltför begränsad utsträckning få avgöra, vilken metod han skall använda, hur pass utförlig och fullständig behandlingen bör vara samt hur svaret skall formuleras. Han får härigenom större möjlighet att visa sina kunskaper och sin mognad, men också att avslöja osäkerhet eller valhänthet. Jfr uppg. 1, 6 och 7 allmän kurs och uppg. 2 och 5 specialkurs. Med den formulering uppgifterna hade i skrivningarna torde man kunna få en bättre inblick i examinandernas allmänna ståndpunkt än med den föreslagna preciseringen, som jag anser vara en avgjord försämring på grund av dess tendens att ge de slätstrukna examinanderna samma möjligheter som de duktiga.

Den olägenhet, som lektor Olson velat undgå, är ju den, att bedömningen kan bli olika vid olika läroverk. Vid första påseendet förefaller det alldeles självklart, att en och samma lösning över hela landet måste bedömas på samma sätt, om det skall vara rättvist. En närmare eftertanke visar emellertid, att det icke vore rättvist, om en examensskrivning skulle bedömas uteslutande med hänsyn till de presterade lösningarna. Det ligger en påtaglig fördel för examinanderna i det hos oss använda systemet, att den lärare, som undervisat en examinand, har ett visst inflytande på bedömningen av examinandens skrivning. En och samma lösning är nämligen icke likvärdig, om den presterats under olika betingelser. Tag som exempel uppg. 7 allmän kurs i våras. En bristande korrekthet beträffande sammanhörande värdepar bör icke utan vidare bedömas på samma sätt överallt. Har examinanden varit med om liknande uppgifter förut och fått påpekad för sig vikten av att observera perioderna etc., så bör man givetvis ställa större krav på korrektheten i detta avseende, än om inga trigonometriska ekvationssystem behandlats i klassen, detta i strängt formell anslutning till de metodiska anvisningarna. (För att hindra eventuella förhastade slutsatser vill jag nämna, att mina egna lärjungar i våras fingo finna sig i den strängare bedömningen). Därför ligger det faktiskt i rättvisans intresse, att bedömningen icke är schablonmässigt likformig över hela landet.

Givetvis får emellertid den nyssnämnda synpunkten icke drivas för långt. Och det är här främst medbedömarens sak att förhindra det. Att räkna uppg. 2 specialkurs som fullvärdig lösning, om det icke visats, att verkligen maximum resp. minimum föreligger, är för mig obegripligt, i all synnerhet om det är fråga om de högsta betygen. Det vore ju nästan värre än om man i motsvarande fall ville utan vidare godtaga en riktig lösning till en kvadratrotsekvation utan att prövning verkställts eller att godtaga en riktig lösning av en uppgift rörande en oändlig geometrisk serie utan undersökning av konvergensvillkoret. Men att med hänsyn till dylika fall, som jag är övertygad om äro sällsynta undantagsfall, giva uppgifterna en formulering, som visserligen omöjliggör pressade tolkningar, men som också försvårar de duktiga lärjungarnas självständiga insatser, anser jag oriktigt.

För att undvika missförstånd vill jag till sist betona, att jag givetvis icke generellt opponerar mot de sätt att precisera, som lektor Olson föreslagit. Sådant måste bedömas från fall till fall. Och omformuleringen i de konkreta fall, det här gäller, anser jag icke vara motiverad.

C. E. Sjöstedt.

Bokanmälningar.

N. V. E. Nordenmark, *Anders Celsius*. Almquist & Wiksell, Uppsala 1936, 284 sid., kr. 10:—.

Den omständigheten att Anders Celsius namn blivit förknippat med ett instrument, som kommit att få en utomordentligt stor användning både inom åtskilliga vetenskaper och inom det praktiska livet, har gjort, att denne forskare icke så lätt som många andra råkar i glömska. Kunskapen om hans livsgärning torde dock för de flesta inskränka sig till vetskapen om att han haft något med termometern att skaffa. Dock är väl denna sida av hans vetenskapliga verksamhet av tämligen oväsentlig natur, och frånsett den f. ö. omstridda berömmelse, som kommit honom till del i detta sammanhang, är Celsius namn värt att ihågkommas.

Det är därför med tillfredsställelse man hälsar detta arbete av dr Nordenmark, en författare som tidigare gjort sig känd för sina publikationer på hithörande område, speciellt den svenska astronomiens historia. Boken är en diger volym, som ger en ganska utförlig skildring av Anders Celsius och hans vetenskapliga gärning. Material i form av skriftliga dokument har icke saknats. Ibland tycker man nästan, att citatens antal är mer än tillräckligt, och för en icke språkkunnig kunna möjligen de många citaten på främmande språk verka avskräckande, men förf. har tydligen velat sammanställa ett så rikt och korrekt material som möjligt för att få fram ett naturtroget porträtt av den berömde svenske forskaren. Framställningen blir dock inte torr. Vissa kapitel läser man med spänning och stigande intresse. Så t. ex. skildringen av gradmätningsexpeditionen till Norrland. Det var ju en betydande händelse i svensk vetenskap, och den gav ju också ett glänsande resultat, i det att den av Newton förutsedda avplattningen vid polerna blev ovedersägligen bekräftad.

Vissa drag hos Anders Celsius, som framträtt i tidigare biografier, ha här påvisats vara tillkomna i förhärligande syfte. Sålunda var han ingalunda det matematiska underbarn, som man velat göra honom till (se Grimbergs historia). Tvärtom påpekar förf. här, att Celsius hyste motvilja för rent teoretiska och matematiska undersökningar. Sådant överlämnade han helst åt andra att utföra. Hans styrka låg snarare på det experimentella området.

Celsius korta och rastlösa levnad tillät honom icke att utföra någon vetenskaplig bedrift av större mått, som fordrar samlad tid

och arbetsro. Hans vetenskapliga betydelse ligger framför allt däri, att han hemförde från sin långa vistelse i utlandet sina därunder samlade intryck och erfarenheter och satte fart i det svenska forskningsarbetet vid en tidpunkt, då detta var starkt i behov av livgivande impulser. Han var en initiativrik man och förvärvade sig stor vetenskaplig auktoritet både inom och utom landet och kom därför att spela en betydande roll och är, kan man säga, en typisk representant för sin tid i den svenska vetenskapens historia. Man får ett starkt intryck av hans intensiva aktivitet vid genomläsandet av kapitlet om hans vetenskapliga produktion och utländska korrespondens, och på många skilda områden har han gjort sin insats.

Boken avslutas med en resumé på franska och ett personregister. Rekommenderas varmt åt läroverksbiblioteken.

Brynolf Fänge.

Beckman-Jenvall, *Astronomi.* Svenska bokförlaget, Stockholm, 1937. 78 sid. Pris i pappersband kr. 1:80.

Boken utgör ett separattryck ur Beckman-Wetterblad, Fysik III, och avser att ge en framställning av lärokursen i astronomi enligt nu gällande läroverksstadga. I likhet med nämnda författares övriga böcker är Beckman-Jenvalls framställning uppdelad i en lärobok (omfattande 43 sid.) och en läsebok (35 sid.). Utan tyngande preludier och detaljer — men dock med angivande av det för förståelsen nödvändiga — lämna förf:a till en början en kort framställning av jorden, och solen. Redan på sid. 5 är man inne på en översikt av fixstjärnorna och hur dessa te sig för en jordisk iakttagare. Deras skenbara och verkliga storlekar omnämnas, avståndet till den närmaste stjärnan anges, och solens ställning som blott en stjärna bland stjärnor fastslås. Detta — att i så raska drag komma in på för fantasien lockande ting — synes mig vara en av bokens förtjänster. En annan är de belysande jämförelser mellan celesta och jordiska förhållanden, som här och där göras, och de goda modellerna. För den i rymdgeometriskt seende och tänkande mera oförfarne läsare, till vilken boken vänder sig, böra de mycket underlätta förståelsen av de beskrivna företeelserna.

En svaghet synes mig vara det bitvis väl koncentrerade innehållet och den på sina ställen något abstrakta formen. För en elev i realskolan torde dessa partier ej vara fullt njutbara utan lärarens bistånd. Ej heller synas en del utländska ord — som gott hade kunnat ersättas med likvärdiga svenska — vara lämpliga för realskolestadiet. Mot en del mindre adekvata uttryckssätt kunna

också invändningar göras, liksom mot läsebokens fig. 51, i vilken månen synes vara alldeles för svagt markerad.

Efter att ha behandlat det elementäraste av den sfäriska astronomien och förhållandena inom planetsystemet kommer boken in på fixstjärnvärlden och vår nutida uppfattning om världsalltet. Här ges färska data om stjärnornas storlek, färg, utseende och indelning samt fördelning i rymden. I detta avsnitt är boken modernare än andra svenska läroböcker i astronomi.

Läseboken är bra, innehållande så intressanta kapitel som t. ex. Ett modernt astronomiskt observatorium (Saltsjöbaden), Almanackan, Hur en kapten bestämmer sitt fartygs läge. Den kompletterar på ett förtjänstfullt sätt den något kortfattade framställningen i läroboken.

Beckman-Jenvalls bok utmärker sig i åtskilliga avseenden för en självständig uppläggning av lärogången. Och den är modern och saklig. Trots att den i vissa partier synes något abstrakt och koncentrerad, måste man säga, att förf:a på ett intresseväckande och förtjänstfullt sätt löst den föreliggande uppgiften.

Harald Petersson.

H. Kallmann, *Einführung in die Kernphysik.* F. Deuticke, Leipzig och Wien, 1938, 216 sid. RM 12:—.

På olika språk börjar det utkomma sammanfattande framställningar av den moderna kärnfysiken, avsedda för matematiskt och fysikaliskt kunniga läsare. Skada blott, att sådana monografier fort bli föråldrade. Utvecklingen går snabbt. Kanske för att fördröja åldrandet är föreliggande bok, som utkom i oktober 1937, daterad 1938. Även på annat sätt försöker författaren gå utvecklingen i förväg: Förvirringen inom nomenklaturen har hittills nått därhän, att man tecknar t. ex. ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$, ${}_{3}\mathrm{Li}^{7}$ eller Li^{7}_{3}. Förf. har uppfunnit nya möjligheter, han vänder på ordningen och skriver ${}^{3}_{7}\mathrm{Li}$, dock ibland Li(7) eller Li7. Den beklagansvärda reformen att flytta om siffrorna är likväl ej fullt konsekvent genomförd, ibland skriver han t. ex. Li^{7} och Al^{27}; men ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, som ej kan misstolkas, tecknas stundom p. Anmärkningsvärt är även, att förf. ej lyckats trycka av Klein-Nishina-formeln felfritt. Härutinnan är han kollegial med Chadwick, Rosetti, m. fl. Tryckfelsförteckning saknas. — Om man bortser från dylika formella brister och ser till själva uppläggningen av ämnet och framställningen, måste man giva förf. erkännandet, att boken är klar och koncis, bra disponerad, mycket innehållsrik och, beträffande nya upptäckter, förd fram ända till början av detta år; det intressanta Bothe-Gentner-experimentet med kärnfotoeffekter är medtaget.

J. Tandberg.

Nytt i serien Matematisch-Physikalische Bibliothek,

B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1937. Pris för utlandet pr häfte RM 0: 90:

W. Lietzmann: *Der Pythagoreische Lehrsatz,* 5:e Aufl., 43 s. och W. Lietzmann: *Von der Pythagoreischen Gleichung zum Fermatschen Problem,* 48 s.

Dessa båda häften ha förut varit förenade i en skrift. Då nu nytt stoff medtagits, har förf. ansett en tudelning nödvändig. I den förra berättas den pythagoreiska lärosatsens historia, en roande framställning, som illustreras med skämtteckningar, bl. a. en lustig sådan av Hindenburg. Olika bevismetoder anföras: sönderdelningsbevis, där kvadraterna uppdelas i rätliniga, kongruenta figurer, Euklides bevis med varianter samt bevis med användning av likformighetsläran. Slutligen kommer några utvidgningar av satsen, bl. a. dess generalisering till tre dimensioner. Boken bjuder intet väsentligt nytt, men åtskilligt däri fångar intresset, icke minst diskussionen om det matematiska värdet av de olika metoderna i förhållande till varandra.

Den andra boken betraktar Pythagoras sats ur talteoretisk synpunkt. Största intresset har senare delen av boken, som ger en kort framställning av Fermats problem. På grund av kända omständigheter har detta problem tilldragit sig stor uppmärksamhet i vida kretsar. Det är därför berättigat att utgiva en elementär orientering i frågan. Helt naturligt kan det i detta lilla häfte icke bli tal om att ge en systematisk och djupgående redogörelse för frågan, men efter genomläsandet av häftet har läsaren dock blivit invigd i problemställningen och fått smakbitar av ifrågakommande bevismetoder.

W. Lietzmann-V. Trier: *Wo steckt der Fehler?,* 4:e Aufl., 52 s.

Innehållet i detta häfte är en smula inhomogent. I första kapitlet uppställas en del frågor angående storleksordningen av vissa föremål eller talstorheter, som läsaren har att besvara. Förf. vill visa, hur lätt man där begår fel. Samma syfte har andra kapitlet, där det rör sig om det förvillande intryck, som olika inpassning och inramning av linjer och ytor ger. Sedan talas det om fel och oriktiga uttryck hos författare. Sist följa lösningar av matematiska problem, utförda av lärjungar, vilka därvid begått en eller annan oriktighet, som läsaren har att avslöja. Vad sistnämnda avsnitt beträffar kan man ifrågasätta, om dess utgivande har något berättigande. Felen, som exemplifieras, äro av

banal karaktär. För en elev torde det vara nyttigast att slippa se en oriktig lösning, och en lärare torde få nog av fel i sina elevers skripta.

M. Zacharias: *Das Parallellenproblem und seine Lösung*, 44 s.

För många är icke-euklidisk geometri ett känt namn, om vars innebörd de dock sakna kunskap. Förf. anför som ett exempel, att en vän till honom trodde, att det rörde sig om ett nytt pedagogiskt sätt att framställa den kända euklidiska geometrien. Även många matematiklärare ha rätt vaga föreställningar därom. Och det är ej så underligt, då någon kunskap i icke-euklidisk geometri ej ingår som kursmoment vid utbildningen till lärare i matematik. Då den icke-euklidiska geometrien berör själva fundamenten för geometrien, borde det enligt min mening vara annorlunda. Man hälsar därför med tillfredsställelse utgivandet av detta lilla häfte, som ger en utmärkt elementär framställning av problemets historik och lösning. Förf. förutsätter inga kunskaper i ämnet, men lyckas ge läsaren en klar orientering utan att anlita matematisk formelapparat. Vad som här framställes är hyperbolsk eller Lobatschefskijs geometri. Blott antydningsvis beröres elliptisk eller Riemanns geometri. Det skulle vara önskvärt om ett senare häfte redogjorde för denna. Det nu föreliggande häftet rekommenderas varmt åt matematiklärare, som ej varit i tillfälle att studera hithörande frågor, men även för matematiskt intresserade i allmänhet torde häftet vara välkommet. Som enskilt arbete i såväl högsta som näst högsta ringen lämpar det sig utomordentligt väl. Detta förutsätter dock ett verkligt matematiskt intresse hos eleven.

Arvid Uhler.

Svenskt inköpsregister, Första årg. 1937, Bonniers, 296 + 73 s., kr. 10:—.

Verket är avsett för inköpare inom industrien. Det upptar såväl svenska tillverkare som inhemska återförsäljare av in- och utländskt industrimaterial. Registret är ordnat alfabetiskt efter varuslag: aceton, ackumulatorer, aluminium, asbest, bakelit, celluloid, el. mätinstrument, alkalie- och syrafasta färger, glas, laborationsutensilier m. m. Hur mången gång frågar man sig inte: var finns den saken att tillgå? En institutionsföreståndare är ofta i den situationen. Ehuru ingalunda fullständigt — årgången är den första — lämnar registret många upplysningar av värde.

C. E. B.

Gradualavhandlingar.[1]

JOHN TANBERG, *The Absorption of hard γ-rays as studied by Means of nuclear Reactions and artificial Radioactivity.* (Uppsala Universitets årsskrift 1937: 5) 73 sid. Disp. i Uppsala den 15 maj 1937. Opponenter: Docent H. ALFVÉN, kand. C. E. DAMSBERG och med. lic. T. BRODIN.

Det har under årens lopp utförts ett mycket stort antal undersökningar av de radioaktiva strålarnas gång genom materia. Stundom hava de olika slutsatserna varit stridande mot varandra. Studiet av γ-strålarna försvåras därav, att man vid mätning av jonisationen i en gasfylld kammare huvudsakligen har att göra med verkan av sekundära, tertiära o. s. v. fenomen. Man får mjuk β-strålning, som verkar joniserande, och den uppmätta intensiteten är i hög grad beroende av jonisationskammarens storlek, form och väggmaterialets eller gasens kemiska sammansättning. Den moderna kärnfysiken har givit oss nya synpunkter, nya mätmetoder och nya problem. Vissa av de senaste upptäckterna inom kärnfysiken kunna sålunda nu användas som *medel* för studiet av ett klassiskt problem, även om de givetvis alltjämt äro *målet* för olika detaljundersökningar. En sådan fruktbar upptäckt är den s. k. kärn-fotoeffekten, en kärnreaktion mellan ett γ-kvantum och en kärna. Den i föreliggande undersökning mest använda reaktionen är: ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + h\nu \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{0}_{1}\mathrm{n}$ d. v. s. en med hård γ-strålning bestrålad berylliumatom spränges sönder i två heliumatomer och en neutron. Här är endast sådan γ-strålning verksam, vars energi ligger över ett visst tröskelvärde, 1,6 eMV. En liknande reaktion med deuterium, som även använts, har tröskelvärdet vid 2,2 eMV. — De utsända neutronerna kunna kvantitativt mätas genom att man låter dem reagera med t. ex. indium, som bildar en radioaktiv isotop, vilken med en halvomvandlingstid av 54,4 min. och under β-strålning övergår i tenn. Radioaktiviteten hos en neutronbestrålad mätplatta av indium kan studeras med hjälp av ett tunnväggigt Geiger-Müller-rör. De enstaka impulserna från β-strålningen förstärkas med radiorör, tills de via en thyratron påverka ett räkneverk (jfr. denna tidskr. årg. 20 sid. 115). Man kan alltså i sista hand bekvämt avläsa ett siffertal på räkneverket, som efter vissa nödvändiga korrektioner giva ett mått på den ursprungliga hårda γ-strålningens intensitet. Skjuter man in ett absorberande skikt (bly, aluminium) mellan det γ-strålande preparat och det neutronemitterande

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand. Av utrymmesskäl måste ej mindre än tre autoref. stå över till marsh. 1938.

berylliumpreparatet, får man en mindre mängd impulser registrerade av räkneverket. Här har man fördelen, att all γ-strålning och sekundär strålning av lägre frekvens än som svarar mot ovan anförda tröskelvärde faller bort såsom oveksam. Man får alltså den hårdaste komponenten renodlad, nästan monokromatisk. Försvagningen av γ-strålningen kan sedan beräknas.

Vid föreliggande undersökning har Radiumhemmets i Stockholm största radiumpreparat (5 gram) fått släppa till γ-strålarna. Det bestrålade preparatet (indium med beryllium eller med en marmeladliknande kaka av tungt vatten, som fått stelna med hjälp av agar-agar) har snabbt transporterats till mätapparaten, och den artificiella radioaktiviteten hos indiumskivan har uppmätts. För beräkningen av absorptionskoefficienten har en för ändamålet lämpad funktion beräknats och grafiskt representerats, så att den numeriska behandlingen av observationsmaterialet förenklats. Vissa korrektioner — t. ex. för reflekterade neutroner och för neutroner från den primära radiumkällan — har måst införas, baserade på särskilda mätningar, delvis med andra neutronkällor (α-bestrålat Be).

Bland erhållna numeriska resultat må här endast anföras massabsorptionskoefficienten för bly: $\mu/\varrho = 0{,}0419 \pm 0{,}0004$ $cm^2 \cdot g^{-1}$ (bestämd med beryllium) och hörande till huvudsakligen två hårda linjer i γ-spektrum med en effektiv medelvåglängd av 6,67 XE. Värdet stämmer gott med ett värde $\mu/\varrho = 0{,}0426$, som kan beräknas ur en serie jonisationsmätningar utförda av Piccard i Bruxelles med γ-strålar, som filtrerats genom 12 till 31 cm. Pb. Använder man mindre väl filtrerade strålar, får man vid dylika mätningar högre värden, vanligen $\mu/\varrho = 0{,}047$.

Vissa tekniska förbättringar av Geiger-Müller-röret och dess användningssätt ha införts. En nybestämning av halvomvandlingstiden för den ena radioaktiva indiumisotopen har givit värdet T = 54,4 min., svarande mot en sönderfallskonstant: $\lambda = 0{,}01274 \pm 0{,}0011$ min^{-1}.

Anmärkas må, att absorptionen av γ-strålar är ett synnerligen komplicerat fenomen. Huvudsakligen 3 faktorer samverka: 1) vanlig fotoeffekt, 2) Comptoneffekt, som ger strödd strålning av lägre frekvens (jämte elektroner), 3) parbildning av positiva och negativa elektroner. För extremt kortvågig γ-strålning dominierar 3:e faktorn, för mycket mjuk den 1:a, för den här studerade hårda strålningen dominerar Comptoneffekten. Dessa olika faktorer samverka så, att massabsorptionskoefficienten i bly når ett minimum av c:a 0,041 vid $\lambda = 1$ XE, varför γ-strålningen av större eller mindre våglängd absorberas kraftigare i bly.

Gösta W. Funke, *Untersuchungen über die Spektren von NH und C_2H_2 (Acetylen)*. Stockholm 1937, 74 sid. Disp. i Stockholm den 10 maj 1937. Opponenter: laborator Birger Grundström och docent Heinz Verleger från Phys.-techn. Reichsanstalt, Berlin.

Den riktiga vägen för varje vetenskap är givetvis att börja med enklare fenomen och att först sedan dessa uppklarats fortsätta med mera komplicerade. Utan den ansenliga fond av erfarenheter, som spektroskopisterna hade samlat rörande atomernas och de tvåatomiga molekylernas spektra, skulle den snabba utvecklingen av fleratomiga molekylers spektroskopi under 1930-talet varit omöjlig.

Till denna utveckling ha emellertid även andra omständigheter bidragit. Den 1925 och 1926 framträdande kvant- och vågmekaniken blev hjälpmedlet för en djupgående teoretisk tydning av de vunna resultaten, och i experimentellt avseende skapades nya möjligheter för ett närmare genomforskande av dessa problem genom den snabba förbättring av det infrarödkänsliga plåtmaterialet, som ägde rum åren efter 1930. Tidigare var man för det spektroskopiska studiet av fleratomiga molekyler huvudsakligen hänvisad till undersökningar av de ultraröda rotations- och rotationssvängningsspektra med termometoder. Med hjälp av de moderna infrarödkänsliga plåtarna har det blivit möjligt att fotografera upp till $\sim$ 13 000 Å, och i det sålunda tillgängliga området ligger de högsta översvängningarna för molekyler, som innehålla minst en väteatom.

Samma väg, som här visats vara den för spektroskopin naturliga, ligger även till grund för den föreliggande avhandlingen. Den beskriver först ett arbete på den tvåatomiga NH-molekylen, vars triplettbandsystem vid 3 360 Å gjorts till föremål för ett detaljerat studium, särskilt vad beträffar Λ- och spinuppspaltningen. Förf. har även lyckats få detta spektrum i absorption genom att skicka kontinuerligt ljus genom 110 lågor av NH_3 tillsatt med så mycket lysgas att gasblandningen blir brännbar. Genom denna upptagning har för första gången genom absorption den fria radikalen imin påvisats på jorden. I solspektrum har man tidigare iakttagit dess absorptionsspektrum. Upptagningen visar, att NH är en intermediär sönderfallsprodukt av NH_3, som har en icke alltför liten livslängd, sannolikt av samma storleksordning som OH-radikalen ($\sim$ $^1/_8$ sek).

Den senare delen av avhandlingen är ägnad en undersökning av acetylens rotationssvängningsspektrum, och de slutsatser, som ur detta kunna dragas rörande acetylenmolekylens struktur. För

att man skall kunna komma åt finare detaljer måste ett gitter med stor upplösningsförmåga användas, och samtidigt måste man ha en lång absorptionssträcka för att kunna hålla trycket lågt och undvika tryckutbredning av linjerna. Det möter då mycket stora svårigheter att få tillräcklig ljusintensitet, och förf. har därför konstruerat en cylinderlinsanordning framför de fotografiska plåtarna, varigenom exponeringstiden förkortas c:a 10 gånger. Denna anordning är emellertid rätt besvärlig på grund av den ytterst noggranna injustering den fordrar för att ge skarpa linjer.

Förf. påvisar, att en fleratomig molekyls spektrala svängningsstruktur har flera beröringspunkter med en tvåatomig molekyls elektronstruktur; NH och C_2H_2 kunna tjäna som exempel härpå. C_2H_2 är en symmetrisk molekyl, och då CH-gruppen har kärnspinnet $^1/_2$, kan man vänta sig, att banden visa alternerande intensitet, d. v. s. linjerna i ett band böra vara omväxlande starka och svaga i förhållande 1:3. Detta gäller även de flesta banden, av förf. betecknade band av typ 1. Det har emellertid även upptäckts några band, som tillsynes sakna denna intensitetsväxling (typ 3). Förf. visar nu genom upptagning i största möjliga dispersion, att avsaknaden av intensitetsväxling endast är skenbar. Varje linje visar sig bestå av en svag och en stark komponent med mycket obetydlig frekvensskillnad. Det finnes även band med s. k. Q-gren (typ 2). Ur dessa band kan visas, att under vissa betingelser de enskilda rotationsnivåerna äro föremål för vad förf. benämner Q-uppspaltning, och denna ger nyckeln till förklaring även av banden utan intensitetsväxling.

Vid tvåatomiga molekyler är det känt, att s. k. störningar av linjer kunna uppkomma, om nivåer av olika elektrontillstånd ligga nära varandra och dessutom vissa andra betingelser äro uppfyllda. Då man vid ultraröduppfagningar alltid rör sig inom molekylens grundtillstånd, kunna olika elektrontillstånd aldrig komma nära varandra. Det är därför av stort intresse, att störningar av synnerligen givande art dock kunnat påvisas hos acetylen, och avhandlingen avslutas med en tes, som hänför de här iakttagna fenomenen: Q-uppspaltningen, banden utan intensitetsväxling och störningarna till samma orsak, nämligen till den avvikelse från linearitéten, som åstadkommes av atomernas vibration vinkelrätt mot figuraxeln. Det visas, att den vridimpuls kring figuraxeln, som dessa svängningar ge upphov till, visar en utpräglad analogi med elektronbanvridimpulsen för tvåatomiga molekyler.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

940) *Fem personer få i uppdrag att rita trianglar efter olika direktiv. Den förste skall rita trianglar med någon vinkel = 60°, den andre med någon vinkel = 45°, den tredje med någon = 30°, den fjärde skall alltid börja med att rita en spetsig vinkel, men den femte får fullkomligt fria händer. Alla tänkbara trianglar inom varje kategori antagas vara »likaberättigade». Den förste ritar tre stycken, och jag har en viss matematisk förväntan, att åtminstone en av dem är spetsvinklig. Hur många måste jag låta den andre (tredje, fjärde, femte) rita, för att min förväntan att hitta åtminstone en spetsvinklig bland hans trianglar skall vara minst lika stor som i första fallet?* *S. L.*

941) *Tre cirklar tangera varandra innantill i O. En tangent i punkten P på den minsta cirkeln skär den mellersta i A_1 och den största i A_0. Bestäm lim $PA_0 : PA_1$, då P närmar sig O. Punkterna A_0 och A_1 antagas ligga mellan P och skärningspunkten med tangenten i O.* *X.*

942) *En cirkel med centrum på y-axeln tangerar hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Cirkeln och asymptoterna rotera kring y-axeln. Beräkna volymen av den del av det därvid uppkommande klotet, som ligger utanför den av asymptoterna alstrade koniska ytan.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

Rättelse: Svaret till uppg. 933 a) bör lyda: $(1 - \sqrt[3]{\alpha}) : (\sqrt[3]{1+\alpha})$, som är $= \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = 0{,}48$ för $\alpha = \frac{1}{8}$.

943) Lös ekvationen $(1-a)x^2 + 2(a - a^2 - 1)x + a^2 + 1 - a^3 - a = 0$.

Svar: $x_1 = 1 - a$; $x_2 = \frac{a^2+1}{1-a}$.

944) Lös ekvationen $(1-x)a^2 + 2(x - x^2 - 1)a + x^2 + 1 - x^3 - x = 0$.

Svar: $x_1 = 1 - a$; $x_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a - 1}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 943—945, 947—950, 952—953, 955 äro insända av *X.*, 946 av *C.-E. Fröberg*, 951, 954 av *S. B.*, 956 av *S. Sundén.*

945) Sök värdet av $\frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}$, om $y = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$.

Svar: $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

946) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z + 1 \\ x^2 + y^2 &= z^2 + 2 \\ x^3 + y^3 &= z^3 + 3 \end{aligned}\right\}.$$

Svar:

x	$\frac{4 + \sqrt{22}}{6}$	$\frac{4 - \sqrt{22}}{6}$
y	$\frac{4 - \sqrt{22}}{6}$	$\frac{4 + \sqrt{22}}{6}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

947) I triangeln ABC är sidan $AC = 5$ cm, $AB = 3$ cm. Bissektrisen till vinkeln A delar sidan BC och höjden från B i samma förhållande. Beräkna triangelns yta.

Svar: 6 cm².

948) På samma bas $AB = 12$ cm äro uppritade två trianglar, AMB och ANB så, att cirkeln genom A, M och N har sitt centrum på förlängningen av AB. Beräkna AN, då $AM = 10$ cm, $BM = 13$ cm och $BN = 15$ cm.

Svar: 18 cm.

949) Lös ekvationen $\operatorname{tg} 4x = 4 \operatorname{tg} x$.

Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 65°{,}90 + n \cdot 180°$.

950) Från en punkt P lägges tangentkonen till en sfär. Visa, att de buktiga ytor, som två koncentriska sfärer med P som centrum utskära på konen och sfären, äro lika stora. (Se uppg. 931).

951) Triangeln AOB har ett hörn i origo O. Ekvationen för sidan AB är $2x - 3y + 6 = 0$ och för medianen från A $11x - 12y + 15 = 0$. Angiv ekvationen för sidan OB.

Svar: $x + 3y = 0$.

952) Från punkten $(a; h)$ dragas tangenter till kurvorna $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$. Sök orten för kontaktpunkterna, när λ varierar.

Svar: $hx - ay + ah = 0$.

953) Bestäm transversalaxeln till hyperbeln $x(4y - 3x) = 4$.

Svar: 4.

954) Koordinaterna för punkterna P och Q äro resp. $(1; 0)$ och $(0; 1)$. Bestäm punkten R på linjen $2y = x$ så, att $PR : QR$ blir maximum och minimum.

Svar: Max. i punkten $(-\sqrt{0{,}8}; \sqrt{0{,}2})$; min. i $(\sqrt{0{,}8}; \sqrt{0{,}2})$.

955) P och Q äro punkter på en cirkel. På tangenten i P avsättes a) $PR =$ kordan PQ b) $PR =$ bågen PQ; RQ rakar diametern genom P i S. Bestäm lim PS, när Q närmar sig P. Cirkelns radie $= 1$; R och Q ligga på samma sida om nyssnämnda diameter.

Svar: a) $PS = 4$; b) $PS = 3$.

956) Hur många, med hänsyn till numreringen av sidorna, olika tärningar kunna finnas, om man bortser från det vanliga villkoret, att summan av talen på motstående sidor är 7?

Svar: 30.

Lösningar till uppg. 901—903.

901) *c_0, c_1, c_2, ... äro cirklar, som alla ha sina medelpunkter på kurvan $y = kx^2$ $(k > 0)$. Alla tangera de positiva x-axeln, varjämte varje cirkel (c_n) tangerar den föregående (c_{n-1}) och befinner sig till vänster om denna. Sök radien i c_n, om radien i c_0 är r_0*

Stig Comét.

Från medelpunkterna O_{p-1} och O_p i cirklarna c_{p-1} och c_p dragas radien $O_{p-1}A$ vinkelrät mot x-axeln samt normalen O_pB mot $O_{p-1}A$. Man har då

$$O_pO_{p-1} = r_p + r_{p-1}; \quad O_{p-1}B = r_{p-1} - r_p; \quad O_pB = \sqrt{\frac{r_{p-1}}{k}} - \sqrt{\frac{r_p}{k}}.$$

Relationen $\overline{O_pO_{p-1}}^2 = \overline{O_{p-1}B}^2 + \overline{O_pB}^2$ ger efter förenkling

$$4r_pr_{p-1} = \frac{(\sqrt{r_{p-1}} - \sqrt{r_p})^2}{k}, \text{ alltså } 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{r_p}} - \frac{1}{\sqrt{r_{p-1}}}.$$

Om man i denna rekursionsformel ger p värdena 1, 2, 3 ... n och adderar de erhållna ekvationerna, får man

$$2n\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} - \frac{1}{\sqrt{r_0}}; \text{ alltså } r_n = \frac{r_0}{(1 + 2n\sqrt{kr_0})^2}.$$

B—r.

Även löst av *E—d Smn, C.-E. Fröberg, Georg Pettersson, Karl-Gustav Malmfors, Egil Sæther, Bertil, S. L.*

902) *På en cirkelperiferi fixeras en viss omloppsriktning såsom positiv. A_0 och A_1 äro två givna punkter på periferien. Successivt definieras sedan (för $n = 2, 3 \ldots$) A_n såsom mittpunkten på den båge, som i positiv led går från A_{n-1} till A_{n-2}. Visa, att punkterna A_n, då n växer över alla gränser, närma sig vissa lägen, och angiv dessa lägen.* *Stig Comét.*

Cirkelns medelpunkt kallas O. Vi sätta $\sphericalangle A_0OA_1 = v_0$, $\because \sphericalangle A_1OA_2 = \pi - \frac{v_0}{2} = v_1$, $\sphericalangle A_2OA_3 = \pi - \frac{v_1}{2} = v_2$, $\sphericalangle A_{n-1}OA_n = \pi - \frac{v_{n-2}}{2} = v_{n-1}$, $\because \sphericalangle A_0OA_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} v_i$. Genom summation fås: $v_i = \frac{2\pi}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^i\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^i \cdot v_0$.

$\because \sphericalangle A_0OA_n = \frac{2\pi}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] + \left[(-1)^0 v_0 + (-1)^1 \frac{v_0}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{v_0}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{v_0}{2^{n-1}}\right] = \frac{2\pi}{3}(n-1) + \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] + v_0\left[1 - \frac{1}{2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$. Om $n \to \infty$, fås $\sphericalangle A_0OA_n = \frac{2\pi n}{3} - \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots\right) + v_0\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots\right) = \frac{2\pi n}{3} - \frac{4\pi}{9} + \frac{2v_0}{3}$. Vi välja $n = 3m$; $\because \sphericalangle A_0OB_n = 2\pi m + \frac{2}{3}\left(v_0 - \frac{2\pi}{3}\right)$; A_n ligger alltså i förhållande till A_0 förskjuten en vinkel $= \frac{2}{3}\left(v_0 - \frac{2\pi}{3}\right)$ så när som på hela varv. Man inser då, att gränsläget för A_n är hörnen till en liksidig triangel, inskriven i cirkeln. Ett hörn ligger på vinkelavståndet $\frac{2}{3}\left(v_0 - \frac{2\pi}{3}\right)$ från A_0, de övriga på $\frac{2}{3}\left(v_0 + \frac{\pi}{3}\right)$ och $\frac{2}{3}\left(v_0 + \frac{4\pi}{3}\right)$. *C.-E. Fröberg.*

Även löst av *B—r, Karl Gustav Malmfors, G. Pettersson, Bertil, S. L.*

903) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} x^3 + ryz^2 &= a \\ y^3 + sx^2z &= b \\ rsz^3 - xy^2 &= c \end{aligned}\right\}$$

Ö.

Multiplicera den första ekvationen med $-sz$, den andra med x samt den tredje med y och addera, så fås $-asz + bx + cy = 0$ (ekv. 1). Multiplicera den första med y^2, den andra med $-rz^2$ samt den tredje med x^2 och addera, så fås $ay^2 - brz^2 + cx^2 = 0$ (ekv. 2). Av (1) och (2) erhålles $x = \frac{a^2bs + cV\overline{ab^3r + bc^3r - a^3cs^2}}{ab^2 + c^3} \cdot z$ och $y = \frac{ac^2s \mp bV\overline{ab^3r + bc^3r - a^3cs^2}}{ab^2 + c^3} \cdot z$, varefter z omedelbart fås genom insättning i någon av de ursprungliga ekvationerna. Svaren bli långa och svåra att överskåda. *S. L.*

Även löst av *Bertil.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1937.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen $(0{,}2x^2 + 0{,}5)^3 - (0{,}2x^2 - 0{,}5)^3 = 0{,}73$.
2. I triangeln ABC är $AB = 12$ dm, $BC = 6$ dm och $CA = 9$ dm. Punkten D på AC är så vald, att $AD : DC = 2:1$. Hur lång är sammanbindningslinjen BD?
3. I vilket förhållande delas ytan av en regelbunden niohörning genom den längsta diagonalen?
4. En cirkel, som går genom en vinkelspets A i en triangel och tangerar motstående sidan BC i dess mittpunkt, delar sidorna AB och AC i förhållandena $AD : DB = 8:1$, resp. $AE : EC = 5:4$. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
5. Till förmån för tre bröder avsattes vid början av år 1920 18 000 kronor, vilket belopp tillväxte med ränta på ränta efter 4 %. Var och en av bröderna skulle få uppbära ett visst belopp, lika stort för alla tre, vid slutet av det år, då han fyllde 19 år. Den äldste fick sin del vid slutet av år 1929, den näst äldste vid slutet av år 1932 och den yngste vid slutet av år 1936. Hur stort var det ifrågavarande beloppet, som var och en av bröderna erhöll?
6. Ersätt x i uttrycket.

$$\frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$$

med $\frac{1+y}{1-y}$ och förenkla det nya uttrycket så mycket som möjligt.

7. I triangeln ABC är $AB = 5$ dm, $BC = 4$ dm. Genom B drages en rät linje BD, som råkar AC i D. Man vet, att $AD : DC = 5:2$ och att $\angle ABD = 45°$. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
8. $ABCDEF$ är en regelbunden sexhörning. H är mittpunkten på CD. Visa, att AH delar sexhörningens yta i förhållandet 1:2 och beräkna vinkeln mellan AH och AD.

Resultat: **1.** $x = \pm\sqrt{2}$. **2.** $\sqrt{54} = 7{,}348$ dm. **3.** 1,595. **4.** $A = 36°{,}34$; $B = 26°{,}38$; $C = 117°{,}28$. **5.** 10 060 kr. **6.** Uttrycket kan omskrivas så:

$$z = \frac{x^2 - 6 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 4}{x - \frac{1}{x}} = x - \frac{1}{x} - \frac{4}{x - \frac{1}{x}} \qquad (1);$$

$x = \frac{1+y}{1-y}$ ger $x - \frac{1}{x} = -\frac{4}{y - \frac{1}{y}}$, varav $z = -\frac{4}{y - \frac{1}{y}} + y - \frac{1}{y}$, d. v. s. uttrycket (1) med x utbytt mot y. Svaret blir alltså $\frac{y^4 - 6y^2 + 1}{y^3 - y}$.

7. $A = 47°{,}38$; $B = 65°{,}70$; $C = 66°{,}92$. Drag från C dels höjden $CH \perp AB$, dels parallellt med DB en linje, som skär AB:s förlängning i F. Då blir $FB = 2$ cm. Om $BH = x$, så erhålles $FH = HC = x + 2$. Ur triangeln BCH erhålles då x och vinklarna B och A ur tringlarna BHC och AHC. – En generell metod är att först bestämma $\sphericalangle CBD$ genom att tillämpa sinusteor. på trianglarna CBD och ABD o. s. v. 8. 13°,90 (Drag AC, då tre lika stora deltrianglar erhållas).

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Allmän kurs.

1. En person utlånade vid början av ett år en viss summa till en fastighetsägare mot 5 % årlig ränta. Den vid varje års slut erhållna räntan insattes omedelbart i en bank mot 3 % årlig ränta. Efter 10 år återbetalades lånet. Vilken effektiv ränta kan han sägas ha haft på sitt kapital under denna tid, d. v. s. till vilken procent borde samma kapital varit utlånat för att med ränta på ränta ge honom samma behållning vid tionde årets slut?
2. En rät linje, som går genom punkterna (1; 3) och (3; 4) i ett rätvinkligt koordinatsystem, råkar y-axeln i punkten A. Genom punkten (3; 2) går en mot denna linje vinkelrät rät linje, som råkar densamma i B och x-axeln i C. Beräkna ytinnehållet av den fyrsiding, vars hörn utgöras av origo samt punkterna A, B och C.
3. I en likbent triangel är basen 4 cm och höjden 8 cm. Bestäm maximiytan för ett i triangeln inskrivet parallelltrapets, som har den kortare av de parallella sidorna utefter triangelns bas och ett hörn på vardera av de andra sidorna samt två vinklar vardera lika med 120°.
4. I en oändlig geometrisk serie bilda första termen, kvoten och summan en geometrisk serie, under det att kvoten, första termen och summan bilda en aritmetisk serie. Angiv den oändliga geometriska serien.
5. Om en likbent triangel roterar kring höjden mot basen eller kring en av de lika sidorna, uppkomma två olika rotationskroppar. Bestäm triangelns toppvinkel, om förhållandet mellan volymerna av den förra och den senare rotationskroppen är 1:3.

6. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm och $DA = 4$ cm samt diagonalen $AC = 7$ cm. Sök vinkeln mellan diagonalerna.
7. Beräkna avståndet mellan medianernas skärningspunkt och bissektrisernas skärningspunkt i en triangel, i vilken två sidor äro 10 och 16 cm och mellanliggande vinkel 60°.
8. I en triangel är en vinkel 75° och den däremot stående sidan 2 dm. Beräkna förhållandet mellan de delar, vari denna sida delas av den mot densamma dragna höjden, om denna är 1 dm.

Resultat: **1.** 4,64 %. **2.** 9,95 ytenheter. **3.** $\sqrt{768} - 24 = 3{,}713$ cm². **4.** $-\frac{3}{8}; -\frac{9}{32}; -\frac{27}{128}; \ldots$ **5.** 82°,82. **6.** 76°,50. En metod är följ.: Lägg fyrhörningen i ett rätvinkligt koordinatsystem, A (0; 0) och C (7; 0), och beräkna koord. för B och D samt därefter BD:s vinkelkoeff., då man får vinkelns tangent $= \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{6})}{9}$. Om sidornas längder äro mångsiffriga tal, beräknas medelst »cirkelsatsen» A:s båda delvinklar och sedan medelst tangentteoremet de övriga vinklarna i $\triangle ABD$. **7.** $\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}155$ cm. Beräkna tredje sidan och radien i den inskrivna cirkeln. Lägg 60°-vinkelns spets i origo med 10 cm-sidan utefter x-axeln. Bissektrisernas skärningspunkt ligger då i $(6;\ 2\sqrt{3})$ och medianernas i $\left(6;\ \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.** $\frac{2\sqrt{3} - 3}{3} = 0{,}1547$ (Triangelns vinklar äro 75°; 75°; 30°).

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

Specialkurs.

1. Brännpunkterna i hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ äro F och F_1. En korda genom F förbinder punkterna P och Q, belägna på samma hyperbelgren. Längden av PF_1 är $4a$. Beräkna vinklarna i triangeln PQF_1.
2. En kvadrat $ABCD$ är given; E är AB:s mittpunkt; P är en punkt på BC. Sök maximum eller minimum för vinkeln DPE, när P rör sig från B till C.
3. Till en parabel äro dragna två fasta tangenter, som i A och B skäras av en tredje rörlig tangent. Visa, att stycket AB synes under konstant vinkel från parabelns brännpunkt.
4. En obegränsad rät linje är dragen genom en given cirkels medelpunkt. A är en punkt på linjen, B en punkt på cirkeln,

sådan att AB är lika med cirkelns radie. M är mittpunkten på sträckan AB. Sök orten för M, när A glider längs linjen.

5. En likbent triangels omkrets är $2p$; den omskrivna cirkelns radie är R. Visa, att ytan av den triangel, vars hörn utgöras av medelpunkterna i de vid den likbenta triangeln vidskrivna cirklarna, är $2pR$.
6. En hyperbels axlar äro parallella med koordinataxlarna. Ekvationerna för en asymptot, en diameter och en tangent äro resp.

$$x - 2y + 8 = 0,$$
$$2x - y + 7 = 0,$$
$$3x - 2y = 0.$$

Härled hyperbelns ekvation.

Resultat: **1.** När $PF_1 = 4a$, blir $PF = 2a$, men $QF_1 = QF + 2a = QP$. I *varje* hyperbel är alltså $\triangle PQF_1$ likbent. Vinkeln P erhålles ur $\triangle FPF_1$, vars sidor äro kända. I en liksidig hyperbel blir $\cos P = 0{,}75$, varför vinklarna i $\triangle PQF_1$ bli 41°,41; 41°,41 och 97°,18. **2.** Kan även lösas geometriskt enl. samma princip som nr. 8 v. t. 1937 (allm. kurs); se denna tidskrifts junih. 1937, sid. 145: Lägg en cirkel, som tangerar BC och går genom D och E. Vinkeln DPE är max., då P ligger i tangeringspunkten, vars läge erhålles ur sekantsatsen, om DE utdrages, tills den i F skär CB:s förlängning. Vinkelns max. = 72°,02. **3.** En enkel geometrisk lösning bygger på följande kända sats: *Den linje, som sammanbinder fokus (F) i en parabel med skärningspunkten (S) mellan två tangenter är bissektris till vinkeln mellan brännpunktsradierna till tangeringspunkterna (P och Q).* Bevis: Fäll normalerna PP_1 och QQ_1 mot styrlinjen. Då $PP_1 = PF$ och $\angle SPP_1 = SPF$, blir $\triangle SPP_1 \cong \triangle SPF$, varav $\angle SP_1P = \angle SFP = \alpha$. På samma sätt erhålles $\angle SQ_1Q = \angle SFQ = \beta$. Men ur trianglarnas kongruens: $SF = SP_1 = SQ_1$. I $\triangle SP_1Q_1$ äro således basvinklarna lika, d. v. s. $\alpha = \beta$. — Låt nu tangenterna i P och Q vara fasta och en rörlig tangent i R skära de förra i T och U, och sammanbind F med P, T, R, U och Q. Kalla vinklarna vid F i de så bildade trianglarna α_1, α_2, α_3, α_4, så är $\alpha_2 = \alpha_1$ och $\alpha_3 = \alpha_4$, varav $\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}$, d. v. s. $\angle TFU = \frac{1}{2} \angle PFQ = \text{konstant}$. — Räknar man analytiskt, finner man att den konstanta synvinkeln TFU är lika med supplementvinkeln till vinkeln PSQ, d. v. s. vinkeln mellan de fasta tangenterna. **4.** Orten är en ellips med storaxeln längs den fasta linjen och medelpunkten sammanfallande med cirkelns (radie = r). Halvaxlarna äro $\frac{3r}{2}$ och $\frac{r}{2}$. **5.** Låt F, G, H vara medelpunkterna i de tre vidskrivna cirklarna, och låt de två

första tangera den givna triangelns, ABC, två lika sidor $AC = BC = a$. Då blir $CF = CG = a$, och om $CH = h$, är $\triangle FGH = ah$. Normaler till CB fällas från H och från den omskrivna cirkelns medelpunkt, varvid ur likformiga trianglar erhålles $\frac{a}{2R} = \frac{p}{h}$, d. v. s. $ah = p2R$.

Relationen gäller för en godtycklig triangel.[1] **6.** $\frac{(x+2)^2}{18} - \frac{2(y-3)^2}{9} = 1$.

Uppgifter i fysik.

Obs. **Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.**

1. En 150 m lång radiomast OA, som väger 60 ton, ligger på horisontell mark och skall resas till vertikalt läge. För ändamålet har man rest en 50 m hög vertikal hjälpmast OB. Dess övre ända B är med en stållina förbunden med en punkt C på radiomasten, belägen 100 m från O. Punkten B är vidare med en annan stållina BD förbunden med en domkraft, placerad i förlängningen av AO, 60 m från O. Båda masterna äro vridbara kring sina vid O belägna ändar. Genom domkraftens dragning i linan BD vrides OA långsamt till vertikalläge. Beräkna spänningen i de båda linorna vid rörelsens början, då radiomasten lämnat marken men fortfarande kan anses intaga horisontalläge. Radiomastens tyngdpunkt ligger vid dess mittpunkt. Linornas tyngd försummas.
2. På en rak, horisontell bana rör sig med konstant hastighet en motorvagn av vikten 5 ton jämte släpvagn av vikten 4 ton. I ett visst ögonblick brister kopplingen mellan vagnarna, och motorvagnen fortsätter under utveckling av oförändrad dragkraft, medan släpvagnen rör sig ett stycke framåt av farten. Efter 10 sek har släpvagnen ännu inte stannat. Huru stort är i sistnämnda ögonblick avståndet mellan vagnarna? Friktionskoefficienten är 0,02. Ingen bromsning antages förekomma vid någondera vagnen. Luftmotståndet lämnas utan avseende.
3. I en tvättstuga är det 22° varmt. Luften är mättad med vattenånga. Under natten sjunker temperaturen till + 5°. Hur mycket väger det vatten, som därvid utfaller? Rummets volym är 113 m³. Vattenångans mättningstryck uppgår vid 5° C till 6,5 mm och vid 22° C till 19,8 mm. Vikten av en viss volym

[1] Red. inbjuder tidskriftens läsare att före den 20 jan. 1938 till redaktionen insända bevis för det allmänna fallet. De vackraste lösningarna meddelas i marsh. 1938 och honoreras med årg. 1938 av tidskriften.

vattenånga är $^5/_8$ av vikten av en lika stor volym luft av samma temperatur och samma tryck.

4. En låga flämtar regelbundet, ned och upp, ett visst antal flämtningar varje sekund. Man vill bestämma dess svängningstal med en fotografisk metod. Runt om en cylindrisk trumma har man lagt fotografisk film. Trumman kan sättas i rotation kring sin axel, som är vertikal. Lågan avbildas på filmen medelst ett kameraobjektiv. Till skydd mot främmande ljus är trumman inbyggd i ett hus, vari strålknippet insläppes genom ett hål. Vid försöket var trummans diameter 22 cm, och den roterade 39 varv i minuten. Sedan filmen framkallats, befanns, att 45 av lågans svängningar tillsammans upptogo en längd av 10,4 cm på filmen. Beräkna lågans svängningstal.
5. Man önskar bestämma brännvidden hos en konvex spegel. För den skull uppsättes på en optisk bänk en vit skärm, försedd med ett cirkulärt hål av diametern 15 mm, och på 40 cm avstånd därifrån spegeln med den reflekterande ytan vänd mot skärmen. Spegelns huvudaxel går genom hålets centrum. Man låter nu ett av hålet avgränsat knippe med axeln parallella strålar infalla mot spegeln. Knippet reflekteras och alstrar på skärmen en ljus cirkelring med yttre diametern 39 mm. Beräkna spegelns brännvidd. Strålarna få anses som centrala.
6. Man vill anskaffa en enkel skioptikonapparat för en föreläsningssal. Den bör giva bilder av storleken 2×2 m av diapositiv i formatet $8{,}5 \times 8{,}5$ cm, då avståndet mellan diapositivet och den vita duken är 6 m. Vilken brännvidd bör projektionsobjektivet hava? Objektivet kan vid räkningarna behandlas som en tunn lins.
7. Elektromotoriska kraften hos ett termoelement, som användes för strålningsmätningar, skall bestämmas. Till termoelementet anslutes för detta ändamål en ledning, som i serie innehåller en känslig galvanometer och ett precisionsmotstånd å 0,1 ohm. Till detta motstånd kopplas därpå en shuntledning, bestående av ett motstånd av storleken 1 000 ohm och en reostat. Till reostatens båda klämskruvar ansluter man så en ledning, innehållande en ackumulator med elektromotoriska kraften 2,00 volt och i serie med denna ett motstånd. Totala motståndet i sistnämnda ledning är 100 ohm. Samtidigt utsätter man termoelementet för bestrålningen och observerar utslaget å galvanometern. Det visar sig nu, om motståndet i reostaten varieras, att galvanometern blir strömlös, när 7,0 ohm äro inkopplade i reostaten. Beräkna termoelementets elektromotoriska kraft vid den ifrågavarande bestrålningen.

8. Ett radioaktivt preparat utsänder α-partiklar. En sådan partikel väger $6{,}60 \cdot 10^{-24}$ g och har positiv laddning av storleken $9{,}6 \cdot 10^{-10}$ elektrostatiska enheter. Man vill bestämma partiklarnas hastighet. I detta syfte låter man ett knippe α-partiklar genomlöpa en i vakuum befintlig kondensator parallellt med plattorna. Då kondensatorn är oladdad, gå partiklarna rätlinigt fram, mitt mellan plattorna. Pålägger man kondensatorn en hög, konstant spänning, falla partiklarna under passagen mellan plattorna ett litet stycke i riktning mot den platta, som har lägre potential. Vid ett försök av detta slag kunde man anse, att fältet var homogent. Partiklarnas väg genom fältet, vinkelrätt mot kraftlinjerna, var 6 cm. Fältets styrka var 200 dyn per enhetsladdning. Man kunde påvisa, att partiklarna lämnade fältet i en punkt, som låg 1,8 mm från den bana partiklarna följde, medan kondensatorn var oladdad. Beräkna partiklarnas hastighet. Tyngdens inflytande på partiklarnas rörelse lämnas utan avseende.

Resultat: 1. I BC $45\sqrt{5} = 100{,}6$ tonf; i BD $15\sqrt{61} = 117{,}2$ tonf. 2. $1{,}8 \cdot 9{,}81 = 17{,}7$ m. 3. 1,435 kg. 4. 194,4 pr sek. 5. 25 cm. 6. 23,5 cm. 7. 0,0130 mV. 8. $1{,}71 \cdot 10^8$ cm/sek.

Realexamen H. T. 1937.

Provräkning.

1. Bestäm det värde a måste ha i ekvationen $12(x-5)-(x-1) = 4(a-x)-3(x-2)$, då $x = 6$.
2. En svensk befinner sig i Sassnitz och planerar att resa vidare genom Tyskland. Biljetten kostar 180 riksmark. Han kan köpa den i Sassnitz och därvid betala med s. k. resemark, vilka han inköpt i Sverige till en kurs av 100 mark = 98 kr. Men han kan också köpa biljetten genom en resebyrå i Sverige. Därvid får han visserligen betala den efter en kurs av 100 mark = 160 kr., men han erhåller 60 % rabatt å biljettpriset. Huru mycket förtjänar han på att köpa biljetten i Sverige?
3. ABC är en likbent triangel med $AB = AC$. Utdrag AB åt B till ett stycke $BD = BC$. Sammanbind C med D. Beräkna vinkeln A för det fallet, att $AC = CD$.
4. En person skall för ett visst år deklarera för sin inkomst och förmögenhet. Hans lön under året har varit 6 000 kr., hans tillfälliga inkomster under samma år ha varit 536 kr. Han äger 10 aktier på nominellt 50 kr., vilka givit honom i utdelning 10 kr. pr aktie; han hade under året haft 7 200 kr. innestående i en bank, som givit honom 2,5 % ränta, och han äger 5 st. 3 %-obliga-

tioner å nominellt 1 000 kr. stycket. Kursvärdet på varje aktie var 100 kr., och obligationskursen var 105 %. Beräkna hans inkomst och förmögenhet för det året.

5. Lös ekvationssystemet:

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y)-3(x-y)&=18 \\ \frac{2}{x-y}-\frac{1}{x+y}&=\frac{22}{(x+y)(x-y)} \end{aligned}\right\}.$$

6. I en triangel ABC är $AB = 12$ cm och $AC = 9$ cm. Höjden mot AB träffar AB i D, 7 cm från A. Höjden mot AC träffar AC (eller dess förlängning) i E. Beräkna AE.
7. I en rätvinklig triangel är den mindre kateten 6 cm och den större 12 cm. Beräkna radien i den cirkel, som har sin medelpunkt på den större kateten och som tangerar både hypotenusan och den mindre kateten.
8. Förenkla uttrycket $\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right):\left(1-\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}\right)$ och beräkna dess värde för $a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Resultat: **1.** $a = 10\frac{3}{4}$. **2.** 61 kr. 20 öre. **3.** 36°. **4.** Inkomsten är 6 966 kr. Förmögenheten = 7 200 kr. + 5 250 kr. + 1 000 kr. + behållningen av årets inkomst. Upplysning om behållningen är nödvändig men saknas i uppgiften. Att till behållningen bör räknas upplupen men ej lyftad ränteinkomst (t. ex. kapitaliserad bankränta) är en deklarationsteknisk detalj, som ej kan förutsättas vara bekant, vare sig för en real- eller studentexamensabiturlent. Uppgiften måste anses nöjaktigt behandlad, om de tre förstnämnda förmögenhetsposterna äro riktigt angivna. **5.** $x = 7$; $y = 5$. **6.** $9\frac{1}{3}$ cm. **7.** $\sqrt{45}-3 = 3{,}708$ cm. **8.** $\frac{(a+b)^2}{ab} = 6$.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. En glascylinder väger i luft 27,15 g och i vatten 17,15 g. I en annan vätska väger den 8,85 g. Beräkna den senare vätskans specifika vikt.
2. På ett väl avvägt balanshjul av järn borttages starthandtaget och ersättes med ett annat, som väger 60 g mer. På motsatt sida om axeln och lika långt från denna borras ett hål med diametern 25 mm, vilket sedan fylles med bly. Hur djupt skall hålet vara, för att hjulet på nytt skall vara fullt utbalanserat? Spec. vikten för järn är 7,5 och för bly 11,4.

3. En motorplog tillryggalägger på 50 minuter sammanlagt 3 km och utvecklar därunder i medeltal 750 kgf. Hur stor effekt, uttryckt i hästkrafter har den avgivit? 1 hästkraft är 75 kgm/sek.
4. En hängmatta är upphängd mellan två krokar, belägna på samma höjd och på ett avstånd av 26 dm från varandra. En pojke, som väger 50 kg, sätter sig i hängmattan, så att den sträckes. Den kan då med tillräcklig noggrannhet jämföras med ett snöre, som sträckes genom en fastknuten tyngd. Den del av hängmattan, som befinner sig på ena sidan om pojken är 24 dm lång, och hängmattans båda delar bilda rät vinkel med varandra. Beräkna den kraft, varmed hängmattan påverkar var och en av krokarna.
5. En biograflokal, vars volym är 4000 m^3, ventileras och uppvärmes på så sätt att frisk luft av temperaturen —10°C insuges utifrån, passerar en uppvärmningsanordning, där den uppvärmes till +20°C, och sedan insläppes i lokalen. Den förbrukade luften i lokalen pressas samtidigt ut i det fria. För uppvärmningen användes koks med ett effektivt värmevärde av 7000 kcal per kg. Hur mycket kostar uppvärmningen av lokalen per timme, då den insugna luftens volym under denna tid uppgår till 7 gånger lokalens volym? För luftens spec. vikt användes värdet 0,0013, för dess spec. värme värdet 0,24. Kokspriset är 2,25 kr. per hl. 1 hl koks väger 45 kg. Värmeanläggningens verkningsgrad är 75 %.
6. En elektrisk kokapparat om 300 watt påfylles med 1 liter vatten och inkopplas i nätet men blir sedan bortglömd. Hur lång tid dröjer det, tills allt vattnet kokat bort, räknat från det ögonblick, då kokningen började? Vattnets ångbildningsvärme är 540. 1 wattsek = 0,24 gcal.
7. Två likadana glödlampar äro kopplade parallellt med varandra mellan polerna av ett ackumulatorbatteri med elektromotoriska kraften 6 volt och inre motståndet 0,02 ohm. Hur stort är motståndet i vardera lampan, då strömstyrkan i ackumulatorn är 12 ampere? Tilledningstrådarnas sammanlagda motstånd är 0,01 ohm.
8. Ackumulatorbatteriet i en bil avgiver vid starten en kraftig strömstöt till startmotorn. Batteriets elektromotoriska kraft är 6 volt, dess inre motstånd 0,006 ohm, strömstyrkan 150 ampere, då den är som störst. Hur stor effekt i hästkrafter förbrukar startmotorn i detta ögonblick? 1 hästkraft är 736 watt.

Resultat: 1. 1,83. 2. 3,13 cm. 3. 10 hkr. 4. $19\frac{3}{13}$ kgf; $46\frac{2}{13}$ kgf. 5. 2 kr. 50 öre. 6. 125 min. 7. 0,94 ohm. 8. 1,04 hkr.